INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Posloupnosti

Motivace

Víš, jaký bude následující člen v řadách *2, 4, 6, 8, ?* a *2, 4, 8, 16, ?* ?

Urči součet řady $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$

Jak převedeš číslo $2,\overline{4}$ na zlomek ?

1 Definice posloupnosti

- Posloupnost je funkce. Definiční obor je množina přirozených čísel ***N*.** Funkční hodnota funkce se nazývá ***n* -tý člen posloupnosti**. Značíme a_n. Hovoříme o **nekonečné posloupnosti**.
- Pokud $n \leq n_0$ jde o **konečnou posloupnost**.
- $\{a_n\} = \{[n; a_n] \in NxC\}$. **Graf**em posloupnosti jsou izolované body.
- Posloupnost je **omezená**, pokud existuje číslo *k* tak, že pro všechna $n \in N$ platí $|\boldsymbol{a_n}| \leq \boldsymbol{k}$
- Posloupnost je **rostoucí,** pokud pro všechna $n \in N$ platí $\boldsymbol{a_{n+1}} > \boldsymbol{a_n}$
- Posloupnost je **klesající,** pokud pro všechna $n \in N$ platí $\boldsymbol{a_{n+1}} < \boldsymbol{a_n}$

2 Zadání posloupnosti

- Vzorcem pro *n*-tý člen posloupnosti, např.: $a_n = 2n + 1$, $n \in N$
- Rekurentně zadáním prvního členu a rekurentního vzorce, který vyjadřuje $(n+1)-$ $ní\ člen\ posloupnosti\ pomocí\ členů\ předchozích$, např.: $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n - 2$
- výčtem prvků
- graficky

3 Aritmetická posloupnost

- $\boldsymbol{a_{n+1}} = \boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{d}$, $a, d \in R$, $\boldsymbol{d}$ **diference** aritmetické posloupnosti
- $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{d}$
- Pro libovolné členy a_r, a_s platí $\boldsymbol{a_s} - \boldsymbol{a_r} = (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r})\boldsymbol{d}$
- Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti platí $\boldsymbol{s_n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_n})$.

4 Geometrická posloupnost

- $\boldsymbol{a_{n+1}} = \boldsymbol{a_n}.\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a}$, $a, q \in R$ $\boldsymbol{q}$ **kvocient** geometrické posloupnosti
- $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1}.\boldsymbol{q^{n-1}}$
- Pro libovolné členy a_r, a_s platí $\boldsymbol{a_s} = \boldsymbol{a_r}.\boldsymbol{q^{s-r}}$
- Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí $\boldsymbol{s_n} = \boldsymbol{a_1}\frac{\boldsymbol{q^n-1}}{\boldsymbol{q-1}}$ **pro** $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{1}$,

  $\boldsymbol{s_n} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{pro}\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{1}.$

Řešené úlohy

1. Napiš prvních 5 členů posloupnosti dané vzorcem pro *n*-tý člen

   a) $a_n = n + 3$ Dosaď $n = 1,2,\dots,5.\ a_1 = 4, a_2 = 2 + 3 = 5, a_3 = 3 + 3 = 6, a_4 = 4 + 3 = 7, a_5 = 5 + 3 = 8$

   b) $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{9}, a_3 = \frac{1}{16}, a_4 = \frac{1}{25}, a_5 = \frac{1}{36}$

2. Napiš prvních 5 členů posloupnosti dané rekurentně $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n - 1$.

$$(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} = \{3,2,1,0,-1\}$$

3. Rozhodněte, které z posloupností jsou aritmetické a které geometrické. Určete *d* nebo *q*.

   a) $\left(\frac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$

   a) Vypíšeme členy posloupnosti $\left(\frac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \dots\right\}$

   určíme, o kolik nebo kolikrát se liší následující člen od předchozího

   $a_2 - a_1 = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

   $a_3 - a_2 = \frac{6}{5} - \frac{5}{5} = \frac{1}{5}$

   $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{5}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$

   $\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{5}{5}} = \frac{6}{5}$

   členy této posloupnosti se liší o rozdíl $d = \frac{1}{5}$, tato posloupnost je aritmetická.

   b) Vypíšeme členy posloupnosti $\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{2^1}{3^2}, \frac{2^2}{3^3}, \frac{2^3}{3^4}, \dots\right\}$

   určíme, o kolik nebo kolikrát se liší následující člen od předchozího

   $a_2 - a_1 = \frac{2^2}{3^3} - \frac{2^1}{3^2} = \frac{4-6}{27} = \frac{-2}{27}$

   $a_3 - a_2 = \frac{2^3}{3^4} - \frac{2^2}{3^3} = \frac{8-36}{81} = \frac{-28}{27}$

   $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2^2}{3^3}}{\frac{2^1}{3^2}} = \frac{2^2}{3^3} . \frac{3^2}{2^1} = \frac{2}{3}$

   $\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{2^3}{3^4}}{\frac{2^2}{3^3}} = \frac{2^3}{3^4} . \frac{3^3}{2} = \frac{2}{3}$

   členy této posloupnosti se liší o kvocient $q = \frac{2}{3}$, tato posloupnost je geometrická.

4. Rozhodněte, která z čísel *55, 100* jsou členy aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž

$a_1 = -8,\ d = 4{,}5.$

Pokud číslo *55* je $a_n - t\acute{y}$ člen aritmetické posloupnosti, pak

$55 = -8 + (n-1).4{,}5$ dostáváme lineární rovnici s jednou neznámou, kde n je přirozené číslo.

$55 = -8 + 4{,}5.n - 4{,}5$

$67{,}5 = 4{,}5.n$

$15 = n$

Číslo 15 je přirozené číslo, tedy 55 je 15-tý člen aritmetické posloupnosti.

Stejným způsoben ověříme číslo 100.

$100 = -8 + (n-1).4{,}5$

$100 = -8 + 4{,}5n - 4{,}5$

$87{,}5 = 4{,}5n$

$19,\overline{4} = n$ toto číslo není přirozené, tedy číslo 100

není $a_n - t\acute{y}$ člen aritmetické posloupnosti

5. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí :

$a_2 = 16, a_4 = 1.$

Využijeme vzorec pro $a_n - t\acute{y}$ člen geometrické posloupnosti $a_n = a_1.q^{n-1}$

$a_2 = 16 = a_1.q^{2-1} = a_1.q$, tedy $16 = a_1.q$

$a_4 = 1 = a_1.q^{4-1} = a_1.q^3$, tedy $1 = a_1.q^3.$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a_1, q.

Z první rovnice vyjádříme *q* a dosadíme do druhé rovnice. Vypočteme a_1 a následně q.

$q = \frac{16}{a_1}$

$1 = a_1.\left(\frac{16}{a_1}\right)^3$

$1 = a_1.\frac{16^3}{a_1^3}$

$1 = \frac{4096}{a_1^2}$

$4096 = a_1^2$

$a_1 = \pm 64$ 1) $a_1 = 64$, pak $q = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

2) $a_1 = -64$, pak $q = -\frac{16}{64} = -\frac{1}{4}$

Řešením jsou dvě geometrické posloupnosti :

$\left\{64,16,4,1,\frac{1}{4},\frac{1}{16},\dots\right\}$ a $\left\{-64,16,-4,1,-\frac{1}{4},\frac{1}{16},\dots\right\}$.

Úlohy k procvičení A

1. V dané posloupnosti závisí *n*-tý člen a_n na čísle *n*. Znáte-li několik prvních členů, napište alespoň tři členy další a odhadněte vzorec pro a_n.
   a) 4,8,12,16,20,….. b) 1,4,9,16,25,……
   c) -1,1,-1,1,-1,1,……. d) $-\frac{1}{27}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, -3, \ldots..$
2. Zapište vzorcem pro *n*-tý člen
   a) posloupnost všech přirozených sudých čísel,
   b) posloupnost všech přirozených lichých čísel,
   c) posloupnost všech přirozených čísel dělitelných 11.

3. Posloupnost je dána vzorcem pro *n*-tý člen. Napište prvních pět členů posloupnosti a načrtněte graf.
   a) $a_n = 2n + 1$ b) $a_n = n.(2)^{-n}$ c) $a_n = (n-1).n$ d) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$
4. Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou rostoucí a které klesající, zda jsou omezené :
   a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = (-2)^n$ b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$ c) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = 3, d = -0{,}5$
   d) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = \sqrt{2}, d = 0$ e) $(sin\, n)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\frac{n+4}{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$

   (Návod: Vypiš několik prvních členů posloupnosti a sestroj obrazy těchto členů v kartézské soustavě souřadnic v rovině.)
5. Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou aritmetické, které jsou geometrické . Určete diferenci, popřípadě kvocient. V příkladě d, e, f zapiš vzorec pro *n*-tý člen.
   a) $\left(\frac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $(1-n)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 2a_n - 3n - 1$
   e) $a_1 = 8$, $a_{n+1} = a_n + 4.2^n$ f) $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 2(a_n - 3) - a_{n+1}$
6. Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté aritmetické posloupnosti. Určete diferenci.
   a) sin 45˚, sin 0˚, sin $(-45°)$ b) 6, 10, 14
7. Urči součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí :
   a) $a_1 = 6$, $a_{10} = 24$ b) $a_1 = 0$, d $= 1{,}5$ c) $a_1 = 2$, $a_8 = -19$ d) $a_4 = 7$, $a_8 = -1$
8. Určete takové nejmenší číslo $n \in N$, pro něž je s_n v aritmetické posloupnosti $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ větší než 60.
9. Vypočtěte součet všech dvojciferných celých kladných čísel.
10. Určete první dva členy a kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž je $a_3 = -\sqrt{20}$, $a_4 = 10$.

11. V nádobě je m gramů radonu. Jaké množství radonu zbude v nádobě za 36 dní, je-li jeho poločas přeměny 4 dny ? (Poločasem přeměny nazýváme dobu, za kterou se přemění polovina počáteční hmotnosti radioaktivní látky.)

12. Najděte součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž je $a_1 = -2$, $a_2 = 4$.

13. *Historická úloha.* Kupec chtěl koupit koně. S prodavačem se dohodl takto: Koně dostane zadarmo, zaplatí pouze hřebíky v jeho podkovách. Každá podkova je přibita šesti hřebíky, celkem je jich tedy 24. Za první hřebík zaplatí 1 groš, za druhý 2 groše, za každý další dvakrát tolik než za předchozí. Kolik grošů by měl kupec zaplatit ?

Pražský groš *byla stříbrná mince, kterou nechal razit od roku 1300 český král Václav II. Mince byla ve své době ve střední Evropě široce užívaným platidlem. Její název pochází z latinského výrazu denarius grossus – tlustý denár.*

14. Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je ji třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 102 tašky. Přoïtom tašky budou srovnány do řad tak, že v každé následující řadě bude o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba koupit tašek ?

15. Frézka o šesti rychlostech má nejmenší počet otáček za minutu 25, největší počet otáček za minutu 500. Přitom poměr počtů dvou „sousedních“ otáček je konstantní. Určete ho.

16. Tři čísla, která tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti mají součet 60 a součin 7500. Určete tato čísla.

17. Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořila pět následujících členů
a) aritmetické posloupnosti, b) geometrické posloupnosti.

18. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Vypočítejte délky stran.

19. Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 84 cm. Vypočítejte povrch kvádru, víte-li, že jeho objem je 64 cm^3.

20. V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 3, d = 4$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250 ?

21. Vypočítejte součet všech přirozených dvojciferných čísel.

22. V geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 36$ určete kvocient tak, aby platilo s_3≤252.

23. V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 2$ vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec $a_n = 96$.

Výsledky úloh A

1. a) $\dots,24,28,32,\dots.,a_n = 4n$ b) $\dots,36,49,64,\dots.,a_n = n^2$ $c)$ $\dots,-11-1,\dots.,a_n = (-1)^n$
   d) $\dots,-9,-27,-81,\dots.,a_n = -3^{n-4}$
2. a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n-1$ c) $a_n = 11n$
3. a) 3,5,7,9,11 b) $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{1}{č},\frac{5}{32}$ c) 0, 2, 6, 12, 20 d) 0, $\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3}$
4. a) 0,-2,4,-8,16,….. není ani rostoucí, ani klesající, není omezená
   b) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6}$, …. posloupnost je rostoucí, je zdola omezená $a_n \geq \frac{1}{2}$
   c) 3; 2,5; 2; 1,5; 1;……posloupnost je klesající, shora omezená $a_n \leq 3$
   d) $\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2},\dots\dots$ posloupnost je konstantní, je omezená $a_n = \sqrt{2}$

   e) 0,84; 0,91; 0,14; -0,76; …..grafem jsou jednotlivé body sinusoidy,v určitých intervalech klesá, v určitých intervalech roste, je omezená $-1 \leq a_n \leq 1$
   f) $-5;\ -3;\ -\frac{7}{3};\ -2;\ -\frac{9}{5};$ …. posloupnost je rostoucí, zdola omezená $a_n \geq -5$
5. a) AP, $a_1 = \frac{4}{5}, d = \frac{1}{5}$ b) AP, $a_1 = 0, d = -1$ c) GP, $a_1 = \frac{2}{9}, d = \frac{2}{3}$
   d) 7, 10, 13, 16, 19, … e) 8, 16, 32, 64, 128, … f) 5, 3, 1, -1, -3, …
   AP, $a_n = 4 + 3n$ GP, $a_n = 2^{n+2}$ AP, $a_n = 7 - 2n$
6. a) $d = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $d = 4$
7. a) 150; b) 67,5; c) -115; d) 40
8. Alespoň 7
9. 4905
10. $a_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5},\ a_2 = 2$
11. $\frac{m}{2^9}$ gramů
12. 682
13. 16 777 215 grošů
14. 1683 tašek
15. Poměr počtů dvou sousedních otáček frézky je přibližně 1,82.
16. 15,20,25 nebo 25,20,15.
17. a) AP, $d = 160 \Rightarrow 8,168,328,488,648$
    b) GP, $q_1 = 3 \Rightarrow 8,24,72,216,648$ nebo GP, $q_1 = -3 \Rightarrow 8,-24,72,-216,648$
18. 24 cm, 32 cm, 40 cm

19. 1 cm, 4 cm, 16 cm, S=168 cm^2
20. Aspoň 11 členů.
21. $s = 4905$
22. $q\epsilon < -3; 2 >$
23. n=5

5 Vzorce finanční aritmetiky

Vzrůst hodnoty

Částka, hodnota se za určité období zvětší vždy o p % z předchozí hodnoty. Je-li a_0 počáteční hodnota, pak hodnota a_n po n obdobích je

$$\boldsymbol{a_n = a_0 . \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Pokles hodnoty

Částka, hodnota se za určité období zmenší vždy o p % z předchozí hodnoty. Je-li a_0 počáteční hodnota, pak hodnota c po n obdobích je

$$\boldsymbol{a_n = a_0 . \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n}$$

Střádání

Na počátku každého úrokovacího období se pravidelně ukládá částka a; na konci období se k úsporám připisuje úrok ve výši p % úspor. Po n obdobích vzroste vklad na částku a_n:

$$\boldsymbol{a_n = a_0 . \left(r \frac{r^n - 1}{r - 1}\right)}, \textbf{ kde } \boldsymbol{r = \left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Umořování půjčky

Má-li být půjčka K, úrokována p procenty, splacena pravidelnými splátkami za n let, pak splátky s jsou dány vzorcem

$$\boldsymbol{s = K\left(r^n \frac{r - 1}{r^n - 1}\right)}, \textbf{ kde } \boldsymbol{r = \left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Řešené úlohy

1. Vzroste-li výroba každý rok o 3 %, urči, o kolik procent vzroste výroba za 5 let.

V_0 označíme objem výroby na začátku 1. roku.

$V_1 = V_0 + V_0 \frac{3}{100} = V_0(1 + 0{,}03) = 1{,}03\, V_0$ Vypočítáme objem výroby na konci 1.roku.

$V_2 = 1{,}03 . V_1 = 1{,}03^2 . V_0$ Vypočítáme objem výroby na konci 2.roku.

.

.

.

$V_5 = 1{,}03^5 . V_0 = 1{,}16 . V_0$ Vypočítáme objem výroby na konci 5.roku.

Výroba vzroste asi o 16 %.

2. Stroj ztrácí opotřebováním každý rok 4,5 % své ceny. Urči, za jakou dobu klesne cena stroje na polovinu.

c_0 Označíme původní cenu

$c_n = \frac{c_0}{2} \Rightarrow n = ?$ Hledáme počet n roků z ceny po n letech.

$c_1 = c_0 - c_0.\frac{4,5}{100} = c_0\left(1 - \frac{4,5}{100}\right) = c_0.0,955$ Spočteme *cenu na konci prvního roku.*

$c_2 = c_1 - c_1.\frac{4,5}{100} = c_1\left(1 - \frac{4,5}{100}\right) = c_1.0,955 = c_0.0,955^2$ Spočteme *cenu na konci druhého roku.*

.

.

$c_n = c_0.0,955^n$ Porovnáme vyjádření pro c_n, a získáme tak rovnici. Můžeme ji vydělit c_0, cena je nenulová. Rovnici zlogaritmujeme.

$$c_0.0,955^n = \frac{c_0}{2}$$

$$0,955^n = \frac{1}{2}$$

$$n.\log 0,955 = log 0,5$$

$$n = \frac{log 0,5}{log 0,955}$$

$$n \doteq 15$$

Cena stroje poklesne na polovinu asi za 15 let.

3. Počet obyvatel města vzrostl za 10 let z 25 000 na 33 600. Urči, jaký je průměrný roční přírůstek obyvatel v procentech.

$P_0 = 25000$ Označíme p% hledaný roční přírůstek.

$P_1 = P_0 + P_0.\frac{p}{100} = P_0.\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ Vyjádříme počet obyvatel za jeden rok.

$P_k = P_0.\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k$ Vyjádříme počet obyvatel po k letech.

$P_{10} = P_0.\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$ Vyjádříme počet obyvatel po 10 letech, za P_0 a P_{10} dosadíme do vztahu známé údaje, čímž získáme rovnici.

$$33600 = 25000.\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$$

$\frac{33600}{25000} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$ Rovnici zlogaritmujeme.

$log\frac{33600}{25000} = 10.log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

$0{,}128399 = 10.log\frac{100+p}{100}$

$0{,}0128399 = log\frac{100+p}{100}$

$\frac{100+p}{100} = 10^{0{,}0128399}$

$p = 10^{2{,}0128399} - 100$

$p \doteq 3$

Průměrný roční přírůstek obyvatel byl asi 3%.

Úlohy k procvičení B

1. Počátkem roku uložil pan Novák do banky 50 000 Kč. Vklad je úročen 8% ročně.

a) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za jeden rok?(Daň z úroků neuvažujte.)

b) Kolik korun bude mít k dispozici za jeden rok, bude-li mu odečtena daň z úroků ve výši 15 %?

c) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech? (Daň z úroků neuvažujte.)

d) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech, jestliže na konci každého roku mu bude odečtena daň z úroků ve výši 15 %?

2. Za pět let se počet obyvatel ve městě X zvýšil o 12%. Jaký byl roční přírůstek? (Počítejte s přesností na desetiny.)

3. Za kolik let klesne hodnota předmětu na méně než desetinu původní ceny, jestliže ročně odepisujeme 18 % ceny předmětu z předchozího roku?

4. Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 5 % své intenzity. Kolik desek je třeba dát na sebe, aby se intenzita světla snížila alespoň na polovinu původní hodnoty?

5. Kuřák prokouří ročně 1 200 Kč. Kolik by uspořil za 50 let, kdyby tuto částku vždy počátkem roku ukládal na vkladní knížku při ročním úročení 8 %? (Počítejte daň z úroků ve výši 15 %.)

6. Pan Šťastný vyhrál 3 000 000 Kč. Počátkem roku uloží tuto částku na úrok 9 % (daň z úroků je 15%). Kolik peněz může na konci každého roku vybírat, jestliže

a) vybírá jen úroky,

b) chce, aby mu peníze vystačily na dobu 30 let?

7. Průměr ocelového drátu se každým tažením zmenšuje na 90 %. Jaký bude jeho průměr po deseti taženích, byl-li původní průměr 5 mm? Kolik tažení je nutných k tomu, aby průměr drátu byl menší než 2 mm?

Výsledky úloh B

1. a) 54 000 Kč; b) 53 400 Kč; c) 68 024,40 Kč ; d) 65 051,20 Kč
2. 2,3 ‰.
3. Za 12 let.
4. 14 desek.
5. 486 752 Kč
6. a) 229 500 Kč, b) 257 732,40 Kč.
7. Přibližně 1,7 mm; 8 tažení.

6 Limita posloupnosti

Definice

Nechť je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost, a reálné číslo. Říkáme, že číslo a je limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když platí: Ke každému reálnému číslu ε>0 existuje $n_0 \epsilon Z^+$ tak, že pro všechna $n_0 \epsilon Z^+, n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.

Zapisujeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ čteme limita a_n pro n jdoucí k nekonečnu je rovna a.

Příklad 1

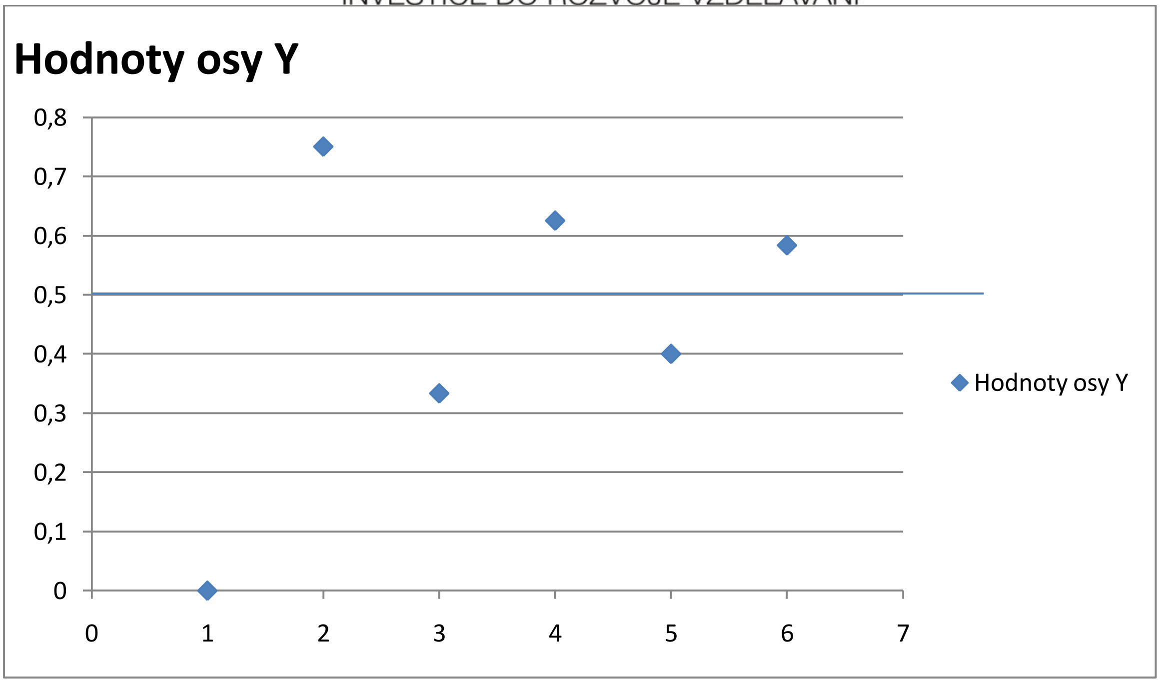
Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_n = \frac{(-1)^n+n}{2n}$. Vypište prvních šest členů této posloupnosti a sestrojte jejich obrazy v kartézské soustavě souřadnic v rovině.

Řešení

$a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{5}{8}, a_5 = \frac{2}{5}, a_6 = \frac{7}{12}$

Z obrázku 1, na ose x jsou hodnoty n=1,2,3,4,5,6, na ose y jsou hodnoty $a_1, a_{2,} \dots, a_6$, vidíme, že prvních šest členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$se stále více přibližuje k číslu $\frac{1}{2}$ .Vzdálenosti obrazů prvních šesti členů posloupnosti od obrazu čísla $\frac{1}{2}$ se stále zmenšují.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_n = \frac{(-1)^n+n}{2n}$ má limitu rovnu $\frac{1}{2}$, zapisujeme $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+n}{2n} = \frac{1}{2}$.



Obrázek 1

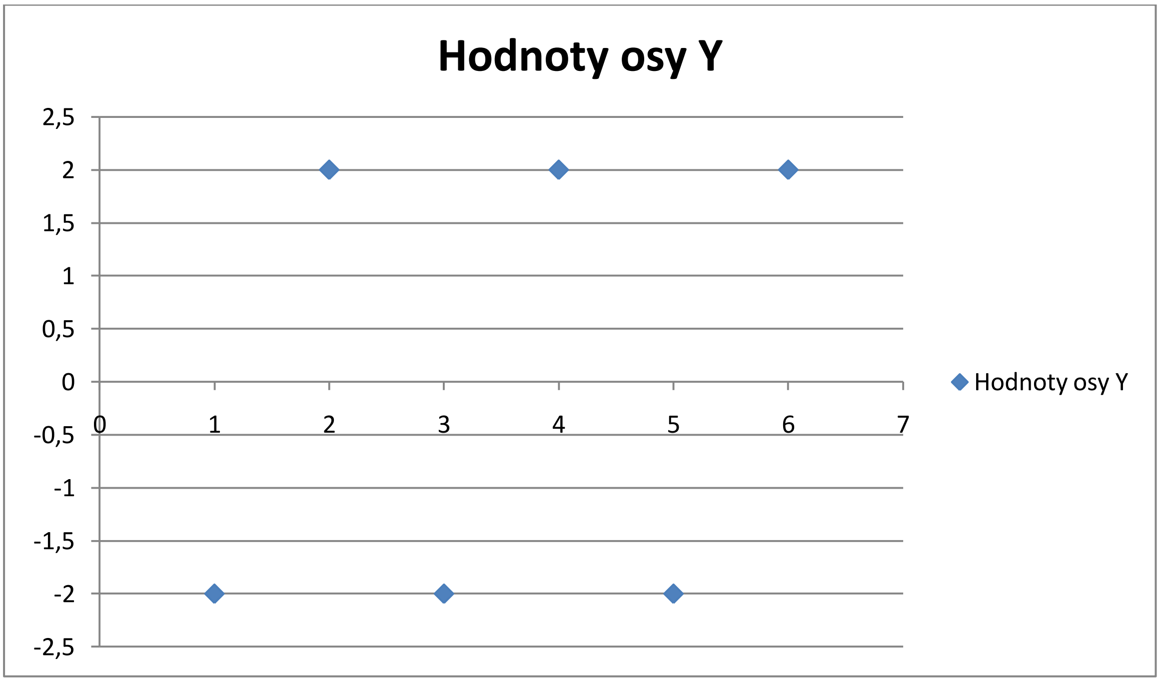
Příklad 2

Rozhodněte, zda posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_n = (-1)^n.2$ má limitu.

Řešení

Vypíšeme několik prvních členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a sestrojíme jejich obrazy v kartézské soustavě souřadnic v rovině.

$a_1 = -2, a_2 = 2, a_3 = -2, a_4 = 2, a_5 = -2, a_6 = 2$



Obrázek 2

Z obrázku 2 vidíme, že pro každé liché číslo n je $a_n = -2$, pro každé sudé číslo n je $a_n = 2$. Členy posloupnosti se tedy neblíží k žádnému (stejnému) číslu, posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

7 Věty o limitách posloupností

Věta 1

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. (Právě jednu nebo žádnou.)

Konvergentní posloupnost **má** limitu.
Divergentní posloupnost **nemá** limitu.

Věta 2

Nechť posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ mají limity, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Pak má limitu i posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b}$$

Věta 3

Nechť posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ mají limity, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Pak má limitu i posloupnost $(a_n . b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = a . b}$$

Věta 4

Nechť posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ mají limity, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, a nechť c je libovolné reálné číslo. Pak mají limity i posloupnosti $(c . a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(c . a_n) = c . \lim_{n\to\infty} a_n = c . a}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b}$$

Věta 5

Nechť posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ mají limity, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, a přitom je $b \neq 0, b_n \neq 0$ pro všechna $n \epsilon \boldsymbol{Z}^+$**.** Pak má limitu i posloupnost $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a platí :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}}$$

Příklad 3

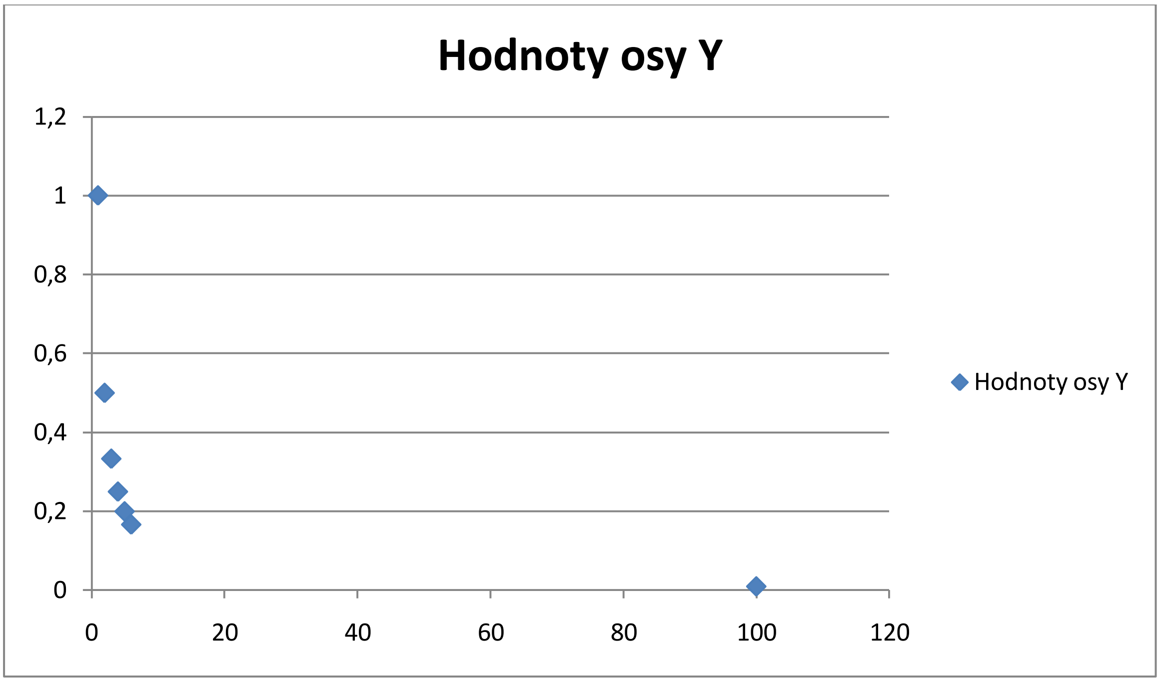
Dokažte, že posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \left((-1)^n \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ mají limity a přitom platí:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n . \frac{1}{n}\right] = 0.$

Řešení

Vypíšeme několik prvních členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a sestrojíme jejich obrazy v kartézské soustavě souřadnic v rovině.

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}, a_6 = \frac{1}{6}, \dots, a_{100} = \frac{1}{100}, \dots, a_{1000} = \frac{1}{1000}, \dots$



$\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = -1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{4}, a_5 = -\frac{1}{5}, a_6 = -\frac{1}{6}, \dots, a_{100} = -\frac{1}{100}, \dots, a_{1000} = -\frac{1}{1000}, \dots$

$\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = -\frac{1}{5}, a_6 = \frac{1}{6}, \dots, a_{100} = \frac{1}{100}, \dots, a_{1000} = \frac{1}{1000}, \dots$

Členy posloupností každé z posloupností se blíží ke stejnému číslu 0.

Příklad 4

Dokažte, že posloupnost $\left(\frac{1+5n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ má limitu, a vypočtěte ji.

Řešení

Využijeme větu 2. Výraz $\frac{1+5n}{n}$ můžeme napsat ve tvaru $\frac{1}{n}$ +5. Posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $(5)_{n=1}^{\infty}$ mají limity (viz příklad 3), proto má podle věty 2 limitu i posloupnost $\left(\frac{1}{n}+5\right)_{n=1}^{\infty}$; přitom platí:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+5\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 5 = 0 + 5 = 5$

Příklad 5

Vypočtěte limitu posloupnosti $\left(\frac{1+3n}{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení

Nejprve upravíme výraz $\frac{1+3n}{2n-1}$ tak, že čitatele i jmenovatele vydělíme číslem n :

$\frac{1+3n}{2n-1} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{3n}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}+3}{2-\frac{1}{n}}$ podle vět 2 až 5 mají dílčí posloupnosti limitu, pak i posloupnost $\left(\frac{1+3n}{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ má limitu.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3n}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+3}{2-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{0+3}{2-0}=1{,}5$$

Věta 6

Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou je $q\epsilon(-1;1)$, má limitu rovnu číslu 0.

Důsledek věty 6

Každá geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient q platí $|q|<1$, má limitu rovnou 0.

Úlohy k procvičení C

1. Jsou dány posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ pro něž je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0{,}5$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 3, a_n \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n\epsilon\boldsymbol{Z}^+$.

Vypočítejte:

a) $\lim_{n\to\infty}(3.a_n)$ b) $\lim_{n\to\infty}(2.a_n.b_n)$

c) $\lim_{n\to\infty}(2.a_n - 4.b_n)$ d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-5a_n}{b_n}\right)$ e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4b_n}{3a_n} - 2a_n\right)$

2. Rozhodněte, které z dále uvedených posloupností mají limitu; pokud existuje, vypočtěte ji.

a) $\left(\frac{2}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{5n}{n^2}-4\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ e) $\left(\frac{2n}{n^2+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\frac{5+(-1)^n n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

g) $\left(\frac{n^3-4}{5n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ h) $\left(\frac{(n-3)(2n-1)}{(n+1)^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ ch) $\left(\frac{5n^2-4n+3}{3n^2+2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Výsledky úloh C

1. a) 1,5; b) 3; c) -11;d) $-\frac{5}{6}$; e) 7

2. a) 0; b) -4; c) 3; d) 1; e) 0; f) neexistuje limita; g) neexistuje limita; h) 2; ch) $\frac{5}{3}$

8 Nekonečná geometrická řada

Příklad 6

Mějme dánu geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$; $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Její kvocient je $\frac{1}{2}$; tato posloupnost má tedy podle věty 6 limitu. Vytvoříme nyní další posloupnost tak, aby pro každé $n\epsilon\boldsymbol{Z}^+$ byl její n-tý člen roven součtu prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Má i tato nová posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}, s_n = a_1 + \cdots + a_n$ limitu?

Řešení