INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární funkce, rovnice a nerovnice
2 lineární rovnice

Motivace

Lineární rovnice jsou základem pro počítání ve všech oblastech matematiky, fyziky, technických oborů. Bez znalosti úprav lineárních rovnic je nemožné vyjadřovat neznámou z fyzikálních a technických vzorců, a vzorce jakkoli upravovat.

2.1 ekvivalentní úpravy

- Při řešení lineárních rovnic používáme ekvivalentní úpravy (tyto úpravy nijak neovlivní výsledek řešení)
- Jsou to především tyto úpravy:
  1. Vzájemná výměna stran rovnice
  2. Přičtení (odečtení) stejného čísla k oběma stranám rovnice
  3. Vynásobení (vydělení) obou stran rovnice stejným nenulovým číslem

!!! tyto úpravy provádíme vždy na obou stranách rovnice **!!!**

2.2 lineární rovnice

- Lineární rovnice obsahují neznámou v první mocnině
- Obsahují právě jednu neznámou (např. x, …)
- Všechny rovnice, které lze upravit na tvar $ax+b = 0$
- Např. $2x+3 = -6x+2$ (lze upravit na tvar $8x + 1 = 0$)

Postup řešení

1. Nejdříve upravíme lineární rovnici (zbavení se zlomku, roznásobení závorek,…)
2. Všechny výrazy, které obsahují neznámou, převedeme na jednu stranu rovnice (např. x), zbytek (čísla) převedeme na druhou stranu (převádíme vždy s opačným znaménkem)
3. Neznámé na jedné straně sečteme (např. všechna x, která jsme převedli na jednu stranu, na této straně sečteme), čísla na druhé straně rovnice sečteme (odečteme)
4. Upravíme tak, aby na jedné straně zůstala pouze neznámá (většinou vydělíme obě strany rovnice číslem, které neznámou násobí)
5. Zapíšeme množinu kořenů rovnice (výsledek zapíšeme do složených – množinových závorek, čteme: množinou kořenů je jednoprvková množina…)
6. Provedeme zkoušku řešení (výsledek dosadíme do zadání, jestliže se pravá a levá strana rovnice rovnají, výsledek je správný) – zkouška není nutná, protože používáme ekvivalentní úpravy, přesto si můžete zkouškou ověřit správnost svého výsledku

Řešené úlohy

1. Řešte lineární rovnici v množině reálných čísel $9x+3=-11x+8$

$9x+3=-11x+8$	• Všechny výrazy, které obsahují neznámou *x* převedeme na levou stranu, zbytek na pravou (k oběma stranám rovnice přičteme výraz *11x* a od obou stran rovnice odečteme číslo *3*)
$9x+11x=8-3$	• Sečteme výrazy obsahující neznámou na levé straně a čísla na pravé straně
$20x=5/:20$	• Obě strany rovnice vydělíme číslem *20*
$x=\frac{5}{20}$	• Na pravé straně upravíme zlomek do základního tvaru (pouze na pravé straně vydělíme čitatele i jmenovatele zlomku číslem *5*)
$x=\frac{1}{4}; K=\left\{\frac{1}{4}\right\}$	

2. Řešte lineární rovnici v množině reálných čísel $-2(x+1)=6(-x-3)+1$

$-2(x+1)=6(-x-3)+1$	• Na obou stranách rovnice roznásobíme závorky (!!! Znaménko mínus před závorkou mění znaménka u všech členů v závorkách!!!)
$-2x-2=-6x-18+1$	• Všechny výrazy, které obsahují neznámou, převedeme na levou stranu rovnice (s opačným znaménkem), čísla převedeme na pravou stranu rovnice (s opačným znaménkem)
$-2x+6x=-18+1+2$	• Na levé straně sečteme všechna *x,* na pravé straně sečteme všechna čísla (sčítat čísla a neznámé můžeme už v předchozím kroku)
$4x=-15/:4$	• Obě strany rovnice vydělíme číslem *4*
$x=-\frac{15}{4}; K=\left\{-\frac{15}{4}\right\}$	• Zapíšeme množinu kořenů do složených (množinových závorek)

3. Řešte lineární rovnici v množině reálných čísel $-\frac{3x-1}{2}+3=\frac{2x+2}{5}-2x$

$$-\frac{3x-1}{2}+3=\frac{2x+2}{5}-2x\,/\cdot 10$$

- Odstraníme zlomky (všechny zlomky, čísla a neznámou vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů zlomků – číslem *10)*

$$-5(3x-1)+30=2(2x+2)-20x$$

- Roznásobíme závorky (pozor na mínus před první závorkou, změní znaménka u všech členů v závorce)

$$-15x+5+30=4x+4-20x$$

- Všechny výrazy, které obsahují neznámou, převedeme na levou stranu, všechna čísla na pravou stranu rovnice

$$-15x-4x+20x=4-30-5$$

$$x=-31; K=\{-31\}$$

- Sečteme na levé straně všechny neznámé, na pravé straně sečteme všechna čísla (sčítat čísla a neznámé můžeme už v předchozím kroku)

4. Řešte lineární rovnici v množině reálných čísel $2(3x+2)-2x=4(x+1)$

$$2(3x+2)-2x=4(x+1)$$

- Na obou stranách rovnice roznásobíme závorky

$$6x+4-2x=4x+4$$

- Na levé straně rovnice od sebe odečteme neznámé (můžeme nejdříve převést neznámé k sobě a pak odečíst všechny najednou)

$$4x+4=4x+4$$

- Všechny výrazy, které obsahují neznámou, převedeme na levou stranu rovnice, číslo na pravou stranu rovnice

$$4x-4x=4-4$$

$$0=0; K=R$$

- Tento výsledek znamená, že množina kořenů je celá množina reálných čísel (výsledek řešení nezávisí na hodnotě neznámé, jestliže za *x* dosadíme jakékoli reálné číslo, výsledek bude 0 = 0*)*

5. Řešte lineární rovnici v množině reálných čísel $-3(3-2x)=3(x+3)+3x$

$$-3(3-2x)=3(x+3)+3x$$

- Na obou stranách rovnice roznásobíme závorky (pozor na mínus před první závorkou)

$$-9+6x=3x+9+3x$$

- Na pravé straně rovnice sečteme neznámé *x*

$$-9+6x=6x+9$$

- Neznámou převedeme na levou stranu rovnice, číslo převedeme na pravou stranu rovnice (s opačným znaménkem)

$$6x-6x=9+9$$

- Na levé straně rovnice odečteme neznámé, na pravé straně rovnice sečteme čísla

$$0=18; K=\emptyset$$

- Tento výsledek znamená, že množinou kořenů je prázdná množina (o≠18)

Úlohy k procvičení

1. $3x = 4(2+4x)$
2. $3(x+3) = 1-4(2-x)$
3. $5(x-1)+3 = (x+3)-2(8+6x)$
4. $-\frac{6x+2}{3}+\frac{5x-4}{6} = 1$
5. $\frac{3x-6}{2}-\frac{x}{6} = 8+\frac{6-5x}{3}$
6. $-\frac{6-x}{5}-x = \frac{3x+2}{4}+1$
7. $2-2(x+8) = -2(x+4)-6$
8. $3(x-3)-5 = 3x$
9. $3(x-13) = 8(x-5)-5x$
10. $7(x-2)-2(2x-1) = 3(x-4)$

Výsledky

1. $\left[K = \left\{-\frac{8}{13}\right\}\right]$
2. $[K = \{16\}]$
3. $\left[K = \left\{-\frac{11}{16}\right\}\right]$
4. $[K = \{-2\}]$
5. $\left[K = \left\{\frac{13}{3}\right\}\right]$
6. $\left[K = \left\{-\frac{54}{31}\right\}\right]$
7. $[0 = 0; K = R]$
8. $[0 = 14,\ K = \emptyset]$
9. $[0 = -1,\ K = \emptyset]$
10. $[0 = 0; K = R]$

2.3 lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli

- Jsou to lineární rovnice, ve kterých se neznámá vyskytuje ve jmenovateli zlomku, lze je upravit na tvar *ax+b = 0*
- Např. $\frac{3}{x+1}-2=5$

Postup řešení

1. Vždy musíme stanovit podmínky řešení (jmenovatel zlomku se nesmí rovnat nule – provádíme u všech zlomků, které se v rovnici vyskytují)
2. Odstraníme zlomky (všechny výrazy v rovnici vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů zlomků)
3. Dále postupujeme stejně jako v předchozích úlohách, upravíme rovnici (roznásobením závorek)
4. Výrazy obsahující neznámou převedeme na jednu stranu rovnice (s opačným znaménkem), čísla převedeme na druhou stranu rovnice (s opačným znaménkem)
5. Upravíme tak, aby na jedné straně zůstala pouze neznámá (většinou vydělíme obě strany rovnice číslem, které neznámou násobí)
6. Zapíšeme množinu kořenů rovnice (výsledek zapíšeme do složených závorek), musíme zkontrolovat, zda řešení vyhovují podmínkám
7. Provedeme zkoušku řešení (kořen rovnice dosadíme do zadání, jestliže se pravá a levá strana rovnice rovnají, výsledek je správný) – zkouška není nutná, protože používáme ekvivalentní úpravy, přesto si můžete zkouškou ověřit správnost svého výsledku

Řešené úlohy

1. Řešte lineární rovnici s neznámou ve jmenovateli v množině reálných čísel $\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{5}{x}$

$$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$$
$$x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$$
$$x\neq 0$$
$$[x\neq 2, x\neq -2, x\neq 0]$$

- Určíme podmínky (všechny jmenovatele zlomků musí být nenulové)

$$\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{5}{x} \quad /\cdot(x-2)(x+2)x$$

- Odstraníme zlomky (všechny členy rovnice vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů zlomků)

$$3(x+2)x+2(x-2)x=5(x-2)(x+2)$$
$$3(x^2+2x)+2(x^2-2x)=5(x^2-2x+2x-4)$$

- Roznásobíme závorky (první a druhou závorku násobí čísla a zároveň *x*, roznásobíme postupně)

$$3x^2+6x+2x^2-4x=5x^2-20$$

- Na obou stranách rovnice sečteme neznámé a čísla

$$5x^2+2x=5x^2-20$$

- Na levou stranu rovnice převedeme všechny výrazy, které obsahují neznámou, na pravou stranu rovnice převedeme čísla

$$5x^2-5x^2+2x=-20$$

- Výrazy s x^2 se odečtou (nejednalo by se o lineární rovnici)

$$2x=-20 \,/{:}2$$

- Obě strany rovnice vydělíme číslem *2*

$$x=-10, K=\{-10\}$$

- Zkontrolujeme, zda řešení vyhovuje podmínkám, (v tomto případě vyhovuje)

2. Řešte lineární rovnici s neznámou ve jmenovateli v množině reálných čísel $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{3x+5}{x^2-4}$

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{3x+5}{(x-2)(x+2)}$$

- Nejdříve upravíme jmenovatele zlomku na pravé straně rovnice (pomocí vzorce $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$)

$$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$$
$$x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$$
$$[x\neq \pm 2]$$

- Určíme podmínky

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{3x+5}{(x-2)(x+2)} \quad /(x-2)(x+2)$$

- Odstraníme zlomky (všechny členy rovnice vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů zlomků)

$$(x+2)+(x-2)=3x+5$$

- Na obou stranách rovnice sečteme (odečteme) neznámé a čísla

$$2x=3x+5$$

- Neznámou převedeme na levou stranu

$$2x-3x=5$$

- Na levé straně odečteme neznámé

$$-x=5$$

- Obě strany rovnice vynásobíme číslem -1

$$x=-5, K=\{-5\}$$

- Zkontrolujeme, zda řešení vyhovuje podmínkám, (v tomto případě vyhovuje)

3. Řešte lineární rovnici s neznámou ve jmenovateli v množině reálných čísel

$$\frac{x+3}{x(3x-6)}+\frac{8}{3x(x-2)}=\frac{x-1}{3x^2-6x}$$

$$\frac{x+3}{3x(x-2)}+\frac{8}{3x(x-2)}=\frac{x-1}{3x(x-2)}$$

- Upravíme jmenovatele prvního zlomku na levé straně (ze závorky vytkneme číslo *3*) a na pravé straně rovnice (vytkneme výraz *3x*)

$$3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$
$$[x \neq 0; x \neq 2]$$

- Určíme podmínky (jmenovatelé zlomků se nesmí rovnat nule)

$$\frac{x+3}{3x(x-2)}+\frac{8}{3x(x-2)}=\frac{x-1}{3x(x-2)} \; / \cdot 3x(x-2)$$

- Odstraníme zlomky (všechny zlomky vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů zlomků)

$$x+3+8=x-1$$

- Na levé straně rovnice sečteme čísla

$$x+11=x-1$$

- Neznámou převedeme na levou stranu, číslo na pravou stranu rovnice (s opačnými znaménky)

$$x-x=-1-11$$

- Na levé straně odečteme neznámé, na pravé straně odečteme čísla

$$0=-12; K=\emptyset$$

- Tento výsledek znamená, že množinou kořenů je prázdná množina, neexistuje žádné *x,* pro které by rovnice platila (0≠ - 12)

4. Řešte lineární rovnici s neznámou ve jmenovateli v množině reálných čísel $\frac{-2}{x+2}+\frac{-6}{2-x}=\frac{3x+8}{x^2-4}$

$$\frac{-2}{x+2}+\frac{-6}{2-x}=\frac{3x+8}{(x-2)(x+2)}$$

- Nejdříve upravíme jmenovatele zlomku na pravé straně rovnice (pomocí vzorce *a*^{2}-*b*^{2}=*(a-b)(a+b)*)

$$x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$$
$$2-x\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$$
$$[x\neq \pm 2]$$

- Určíme podmínky (jmenovatelé zlomků se nesmí rovnat nule)

$$\frac{-2}{x+2}+\frac{-1}{-1}\cdot\frac{-6}{2-x}=\frac{3x+8}{(x-2)(x+2)}$$

- Upravíme druhý zlomek na levé straně rovnice (vynásobíme čitatele i jmenovatele zlomku -1, ve jmenovateli i v čitateli se změní u všech výrazů znaménka)

$$\frac{-2}{x+2}+\frac{6}{-2+x}=\frac{3x+8}{(x-2)(x+2)} \quad / (x-2)(x+2)$$

- Odstraníme zlomky (všechny zlomky vynásobíme nejmenším společným násobkem, jmenovatelů zlomků)

$$-2(x-2)+6(x+2)=3x+8$$

- Na obou stranách rovnice roznásobíme závorky (pozor na mínus před závorkou, změní znaménka u všech výrazů v závorce)

$$-2x+4+6x+12=3x+8$$

- Na levé straně sečteme neznámé a čísla

$$4x+16=3x+8$$

- Výraz, který obsahuje neznámou, převedeme na levou stranu (s opačným znaménkem), číslo převedeme na pravou stranu (s opačným znaménkem)

$$4x-3x=8-16$$

- Na levé straně rovnice odečteme neznámé, na pravé straně rovnice odečteme čísla

$$x=-8 \quad K=\{-8\}$$

- Zkontrolujeme, zda řešení vyhovuje podmínkám, (v tomto případě vyhovuje)

Úlohy k procvičení

1. $\dfrac{3x+1}{3x(x+1)}-\dfrac{x-8}{3x^2-3x}=\dfrac{5x}{x(3x-3)};\left[x\neq 0, x\neq -1; x=3, K=\{3\}\right]$

2. $\dfrac{7}{x-6}-\dfrac{3}{6+x}=\dfrac{3x^2}{36-x^2};\left[x\neq 6, x\neq -6; x=-\dfrac{42}{25}, K=\left\{-\dfrac{42}{25}\right\}\right]$

3. $\dfrac{6x+2}{3x(x+5)}=\dfrac{6x}{3x^2+15x}+\dfrac{2}{x(3x+15)};\left[x\neq 0, x\neq -5; 0=0, K=R-\{0;-5\}\right]$

4. $\dfrac{2}{x+7}-\dfrac{x-2}{49-x^2}=\dfrac{1}{7-x};\left[x\neq -7, x\neq 7; x=\dfrac{9}{4}, K=\left\{\dfrac{9}{4}\right\}\right]$

5. $\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{4x}{2x-1};\left[x\neq -3, x\neq - x=0; K=\{0\}\right]$

6. $\dfrac{-4}{x-3}=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{6}{x};\left[x\neq 3, x\neq -1, x\neq 0; x=-9, K=\{-9\}\right]$

7. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3}{x};\left[x\neq 1, x\neq 2, x\neq 0; x=3, K=\{3\}\right]$

2.4 lineární rovnice s neznámou v absolutní hodnotě

- Jde o lineární rovnice, ve kterých se neznámá vyskytuje v absolutní hodnotě
- Např. $2x - |x+6| = 8$
- Při řešení tohoto typu rovnic vycházíme z definice absolutní hodnoty
- Metoda, kterou využíváme, při řešení tohoto typu lineárních rovnice se nazývá metoda intervalů

Absolutní hodnota výrazu V(x)

- Absolutní hodnota kladného výrazu je kladný výraz: $V(x) \geq 0$, pak $|V(x)| = V(x)$
- Absolutní hodnota záporného výrazu je záporný výraz: $V(x) < 0$, pak $|V(x)| = -V(x)$

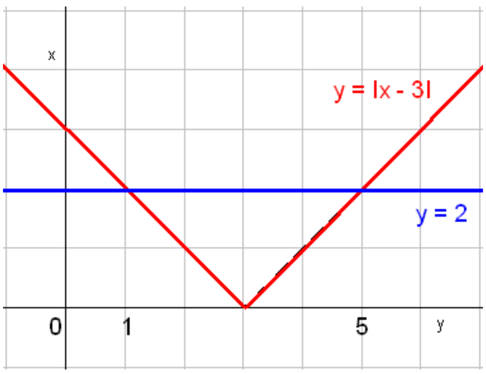
Postup řešení

1. Určíme nulové body tak, že výrazy v absolutních hodnotách, které se v rovnici vyskytují, položíme rovny nule (je-li v rovnici jedna absolutní hodnota obsahující neznámou, určíme jeden nulový bod, jsou-li v rovnici dvě absolutní hodnoty obsahující neznámou, určíme dva nulové body,…)
2. Pomocí nulových bodů získáme intervaly (nulové body rozdělí číselnou osu na jednotlivé intervaly, je-li v rovnici jedna absolutní hodnota, získáme dva intervaly, jsou-li v rovnici dvě absolutní hodnoty, získáme tři intervaly,…)

   Pozn. Jednotlivé intervaly budou vždy zleva uzavřené
3. Sestavíme tabulku, ze které snadno zjistíme, ve kterém intervalu jsou pro jednotlivé výrazy v absolutních hodnotách kladná a záporná znaménka (zjistíme tak, že dosadíme libovolné číslo z tohoto intervalu za x a sledujeme znaménka výrazů v absolutních hodnotách)

   Pozn.:pro určení znaménka výrazu v absolutní hodnotě nesmíme dosazovat krajní body intervalu (nulové body)
4. Provedeme dílčí řešení pro každý interval, v němž nahradíme absolutní hodnotu normální závorkou s ohledem na znaménka výrazů v absolutních hodnotách pro daný interval
5. Konečnou množinu kořenů získáme sjednocením dílčích výsledků (musíme si dávat pozor na to, zda výsledek pro jednotlivý interval patří do tohoto intervalu, jestliže nepatří, je pro tento interval kořenem prázdná množina Ø)

Grafické řešení



$|x - 3| = 2$

- Graficky znázorníme zvlášť lineární funkci s absolutní hodnotou $y = |x - 3|$, zvlášť lineární funkci $y = 2$
- množinou kořenů jsou x – *ové* souřadnice průsečíků obou funkcí
- $K = \{1;5\}$
- Grafické řešení není součástí této kapitoly

Řešené úlohy

1. Řešte v množině reálných čísel lineární rovnici s absolutní hodnotou $-2 + |x+3| = 2x$

$-2 + |x+3| = 2x$

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

- Určíme nulový bod (výraz v absolutní hodnotě je roven nule)

$-\infty$ ——— -3 ——— $+\infty$

$(-\infty;-3)$ $\langle -3;\infty)$

- Určíme intervaly (naneseme nulový bod na číselnou osu)

	$(-\infty; -3)$	$\langle -3;\infty)$
x+3	−	+

- Sestavíme tabulku pro určení znamének výrazů v absolutní hodnotě pro jednotlivé intervaly
    - zvolíme jakékoli číslo z intervalu $(-\infty;-3)$, např. - 4 a dosadíme ho do výrazu v absolutní hodnotě $x + 3 \rightarrow -4+3 = -1$, proto je ve druhém sloupci druhého řádku tabulky znaménko mínus
    - zvolíme jakékoli číslo z intervalu $\langle -3;\infty)$, např. – 2 a dosadíme ho do výrazu v absolutní hodnotě $x + 3 \rightarrow -2 + 3 = 1$, proto je ve třetím sloupci druhého řádku tabulky znaménko plus

$x \in (-\infty;-3)$

$-2 - (x+3) = 2x$
$-2 - x - 3 = 2x$
$-5 - x = 2x$
$-5 = 3x$
$x = -\frac{5}{3}$
$K_1 = \emptyset$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in (-\infty;-3)$, v tabulce je pro tento interval znaménko mínus, proto při odstranění absolutní hodnoty napíšeme před závorku mínus, dále postupujeme stejně jako u lineárních rovnic
- Zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu $-\frac{5}{3} \notin (-\infty;-3)$, tedy kořenem rovnice v tomto intervalu je prázdná množina

$x \in \langle -3;\infty)$

$-2 + (x + 3) = 2x$
$-2 + x + 3 = 2x$
$x + 1 = 2x$
$1 = x$
$x = 1$
$K_2 = \{1\}$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in \langle -3;\infty)$ v tabulce je pro tento interval znaménko plus, proto při odstranění absolutní hodnoty napíšeme před závorku plus, dále postupujeme stejně jako u lineárních rovnic
- Zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu $1 \in \langle -3;\infty)$

$K = K_1 \cup K_2 = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$

- Zapíšeme množinu kořenů lineární rovnice s absolutní hodnotou

2. Řešte v množině reálných čísel lineární rovnici s absolutní hodnotou $5 - |x-2| = x$

$5 - |x-2| = x$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

- Určíme nulový bod (výraz v absolutní hodnotě je roven nule)

- ∞ ——— 2 ——— +∞

$(-\infty;2)$ $\langle 2;\infty)$

- Určíme intervaly (naneseme nulový bod na číselnou osu)

	$(-\infty; 2)$	$\langle 2;\infty)$
x-2	−	+

- Sestavíme tabulku pro určení znamének výrazů v absolutní hodnotě pro jednotlivé intervaly
  - zvolíme jakékoli číslo z intervalu $(-\infty;2)$, např. –1 a dosadíme ho do výrazu v absolutní hodnotě $x - 2 \rightarrow -1 - 2 = -3$, proto je ve druhém sloupci druhého řádku tabulky znaménko mínus
  - zvolíme jakékoli číslo z intervalu $\langle 2;\infty)$, např., 3 a dosadíme ho do výrazu v absolutní hodnotě $x - 2 \rightarrow 3 - 2 = 1$, proto je ve třetím sloupci druhého řádku tabulky znaménko plus

$x \in (-\infty;2)$

$$5 - (-)(x-2) = x$$
$$5 + x - 2 = x$$
$$x + 3 = x$$
$$3 = 0$$
$$K_1 = \emptyset$$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in (-\infty;2)$, v tabulce je pro tento interval znaménko mínus, proto při odstranění absolutní hodnoty napíšeme před závorku mínus, dále postupujeme stejně jako u lineárních rovnic
- Tento výsledek znamená, že množinou kořenů pro tento interval je prázdná množina, neexistuje žádné x, pro které by rovnice platila,

$x \in \langle 2;\infty)$

$$5 - (+)(x-2) = x$$
$$5 - x + 2 = x$$
$$7 = 2x$$
$$x = \frac{7}{2} \quad K_2 = \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in \langle 2;\infty)$ v tabulce je pro tento interval znaménko plus, proto při odstranění absolutní hodnoty napíšeme před závorku plus, dále postupujeme stejně jako u lineárních rovnic
- Zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu $\frac{7}{2} \in \langle 2;\infty)$

$$K = K_1 \cup K_2 = \emptyset \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

$$K = \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

- Zapíšeme množinu kořenů lineární rovnice s absolutní hodnotou

3. Řešte v množině reálných čísel lineární rovnici s absolutní hodnotou $3 + |1 - x| = 2|x|$

$3 + |\underline{1 - x}| = 2|\underline{x}|$

$1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

$x = 0$

$-\infty$ ——— 0 ——— 1 ——— $+\infty$

$(-\infty;0)$ $\langle 0;1\rangle$ $(1;\infty)$

- Určíme nulové body (výrazy v absolutních hodnotách jsou rovny nule, v úloze jsou dvě absolutní hodnoty, tedy dva nulové body)
- Určíme intervaly (naneseme nulové body na číselnou osu, v úloze jsou dva nulové body, tedy tři intervaly)
- Sestavíme tabulku pro určení znamének výrazů v absolutních hodnotách pro jednotlivé intervaly

	$(-\infty;0)$	$\langle 0;1)$	$\langle 1;\infty)$
1 – x	+	+	−
x	−	+	+

  - zvolíme jakékoli číslo z intervalu $(-\infty;0)$, např. –1 a dosadíme do prvního výrazu v absolutní hodnotě $\underline{1 - x} \rightarrow 1 - (-1) = 2$ do druhého výrazu v absolutní hodnotě $\underline{x} = -1$
  - zvolíme jakékoli číslo z intervalu $\langle 0;1\rangle$, např. 0,5 a dosadíme do prvního výrazu v absolutní hodnotě $\underline{1 - x} \rightarrow 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ do druhého výrazu v absolutní hodnotě $\underline{x} = 0{,}5$
  - zvolíme jakékoli číslo z intervalu $(1;\infty)$ např. 2 a dosadíme do prvního výrazu v absolutní hodnotě $\underline{1 - x} \rightarrow 1 - 2 = -1$ do druhého výrazu v absolutní hodnotě $\underline{x} = 2$

$x \in (-\infty;0)$

$3 + (1 - x) = -2x$

$3 + 1 - x = -2x$

$4 - x = -2x$

$4 = -x$

$x = -4;\ K_1 = \{-4\}$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in (-\infty;0)$, v tabulce je pro tento interval výraz v absolutní hodnotě na levé straně rovnice kladný (+ (1-x)) a výraz v absolutní hodnotě na pravé straně rovnice je záporný (-x)
- Zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu $-4 \in (-\infty;0)$

$x \in \langle 0;1)$

$3 + (1 - x) = 2x$

$3 + 1 - x = 2x$

$4 - x = 2x$

$4 = 3x$

$x = \frac{4}{3};\ K_2 = \emptyset$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in \langle 0;1)$ v tabulce je pro tento interval výraz v absolutní hodnotě na levé straně rovnice kladný (+ (1-x)) a výraz v absolutní hodnotě na pravé straně rovnice kladný (+x)
- Zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu $\frac{4}{3} \notin \langle 0;1)$

$x \in \langle 1;\infty)$

$3 - (1 - x) = 2x$

$3 - 1 + x = 2x$

$2 + x = 2x$

$2 = x$

$x = 2;\ K_3 = \{2\}$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in \langle 1;\infty)$ v tabulce je pro tento interval výraz v absolutní hodnotě na levé straně rovnice záporný (- (1-x)) a výraz v absolutní hodnotě na pravé straně rovnice kladný (+x)
- Zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu $2 \in \langle 1;0)$

$K = \{-4;2\}$

- Zapíšeme množinu kořenů rovnice

4. Řešte v množině reálných čísel lineární rovnici s absolutní hodnotou $|1-x| = -5|x+3|$

$|1-x| = -5|x+3|$

$1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

$-\infty$ ——— -3 ——— 1 ——— $+\infty$

$(-\infty;-3)$ $\langle -3;1)$ $\langle 1;\infty)$

- Určíme nulové body (výrazy v absolutních hodnotách jsou rovny nule, v úloze jsou dvě absolutní hodnoty, tedy dva nulové body)
- Určíme intervaly (naneseme nulové body na číselnou osu, v úloze jsou dva nulové body, tedy tři intervaly)
- Sestavíme tabulku pro určení znamének výrazů v absolutních hodnotách pro jednotlivé intervaly

	$(-\infty;-3)$	$\langle -3;1)$	$\langle 1;\infty)$
1 – x	+	+	–
x + 3	–	+	+

- zvolíme jakékoli číslo z intervalu $(-\infty;-3)$ např. –4 a dosadíme do prvního výrazu v absolutní hodnotě $1 - x \rightarrow 1 - (-4) = +5$
  do druhého výrazu v absolutní hodnotě $x + 3 \rightarrow -4 + 3 = -1$
- zvolíme jakékoli číslo z intervalu $\langle -3;1)$ např. 0 a dosadíme do prvního výrazu v absolutní hodnotě $1 - x \rightarrow 1 - 0 = +1$
  do druhého výrazu v absolutní hodnotě $x + 3 \rightarrow 0 + 3 = +3$
- zvolíme jakékoli číslo z intervalu $\langle 1;\infty)$ např. 2 a dosadíme do prvního výrazu v absolutní hodnotě $1 - x \rightarrow 1 - 2 = -1$
  do druhého výrazu v absolutní hodnotě $x + 3 = 2 + 3 = +5$

$x \in (-\infty;-3)$

$(1 - x) = -5\cdot(-)(x+3)$

$1 - x = 5(x + 3)$

$1 - x = 5x + 15$

$1 - 15 = 5x + x$

$-14 = 5x + x$

$-14 = 6x$

$x = -\frac{14}{6}$

$x = -\frac{7}{3}$ $K_1 = \emptyset$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in (-\infty;-3)$, v tabulce je pro tento interval výraz v absolutní hodnotě na levé straně rovnice kladný (+ (1-x)) a výraz v absolutní hodnotě na pravé straně rovnice je záporný (-(x+3))
- Zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu $-\frac{7}{3} \notin (-\infty;-3)$

$x \in \langle -3;1)$

$(1 - x) = -5(x + 3)$

$1 - x = -5x - 15$

$5x - x = -15 - 1$

$4x = -16$

$x = -4;$ $K_2 = \emptyset$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in \langle -3;1)$ v tabulce je pro tento interval výraz v absolutní hodnotě na levé straně rovnice kladný (+ (1-x)) a výraz v absolutní hodnotě na pravé straně rovnice kladný (+(x+3))
- Zkontrolujeme jestli výsledek patří do intervalu $-4 \notin \langle -3;1)$

$x \in \langle 1;\infty)$

$-(1 - x) = -5(x+3)$

$-1 + x = -5x - 15$

$5x + x = -15 + 1$

$6x = -14$

$x = -\frac{14}{6}$

$x = -\frac{7}{3}$ $K_3 = \emptyset; K = \emptyset$

- Provedeme dílčí řešení v intervalu $x \in \langle 1;\infty)$ v tabulce je pro tento interval výraz v absolutní hodnotě na levé straně rovnice záporný (- (1-x)) a výraz v absolutní hodnotě na pravé straně rovnice kladný (+(x+3))
- Zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu $-\frac{7}{3} \notin \langle 1;\infty)$
- Zapíšeme množinu kořenů

Úlohy k procvičení

1. $|x| = 12$
2. $|x + 1| = 12$
3. $|x - 1| = 12$
4. $5 + |x - 6| = 3$
5. $3|2x + 6| = 7 - 5x$
6. $|x + 1| - |x - 2| = 3x + 2$
7. $6 = |6x| + 6|x - 6|$
8. $|x + 2| = |x - 2|$
9. $2 + 3|x + 1| = 3 - 2|x - 1|$
10. $|x - 1| = 2 + |5x - 1|$

Výsledky

1. $x_1 = -12 \in (-\infty;0)$, $x_2 = 12 \in \langle 0;\infty)$, $K = \{-12;12\}$
2. $x_1 = -13 \in (-\infty;-1)$, $x_2 = 11 \in \langle -1;\infty)$, $K = \{-13;11\}$
3. $x_1 = -11 \in (-\infty;1)$, $x_2 = 13 \in \langle 1;\infty)$, $K = \{-11;13\}$
4. $x_1 = 8 \notin (-\infty;6)$, $x_2 = 4 \notin \langle 6;\infty)$, $K = \emptyset$
5. $x_1 = -25 \in (-\infty;-3)$, $x_2 = -1 \in \langle -3;\infty)$, $K = \{-25;-3\}$
6. $x_1 = -\frac{5}{3} \in (-\infty;-1)$, $x_2 = -3 \notin \langle -1;2)$, $x_3 = \frac{1}{3} \notin \langle 2;\infty)$, $K = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$
7. $x_1 = \frac{5}{2} \notin (-\infty;0)$, $0 \neq 30 \Rightarrow K_2 = \emptyset$, $x_3 = \frac{7}{3} \notin \langle 6;\infty)$, $K = \emptyset$
8. $0 \neq 4 \Rightarrow$, $K_1 = \emptyset$, $x_2 = 0 \in \langle -2;2)$, $0 \neq -4 \Rightarrow K_3 = \emptyset$, $K = \{0\}$
9. $x_1 = 0 \notin (-\infty;-1)$, $x_2 = -4 \notin \langle -1;1)$, $x_3 = 0 \notin \langle 1;\infty)$, $K = \emptyset$
10. $x_1 = \frac{1}{2} \notin \left(-\infty;\frac{1}{5}\right)$, $x_2 = 0 \notin \left\langle \frac{1}{5};1\right)$, $x_3 = -\frac{1}{2} \notin \langle 1;\infty)$, $K = \emptyset$