



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární funkce, rovnice a nerovnice

1. Lineární funkce

1.1 Základní pojmy

Pojem lineární funkce

- Funkce je předpis, který každému číslu x z definičního oboru funkce přiřadí právě jedno číslo y
- Obecně je dána předpisem $f(x): y = ax + b$
- Příklad lineární funkce $f(x): y = 3x - 6$
- Lineární proto, že se zde x vyskytuje v první mocnině

Definiční obor lineární funkce

- Definiční obor jsou všechny hodnoty, kterých může x nabývat
- Značí se $D(f)$
- U lineárních rovnic je definičním oborem většinou množina reálných čísel, popř. její část (interval)
- V grafu jej najdeme na x -ové ose

Obor hodnot lineární funkce

- Obor hodnot funkce je množina všech přípustných hodnot y
- Značí se $H(f)$
- V grafu jej najdeme na y -ové ose

Graf funkce

- Funkce se znázorňuje grafem
- Grafem lineární funkce je přímka
- Abychom narýsovali graf lineární funkce, musíme znát souřadnice minimálně dvou bodů, kterými tato přímka prochází, vždy si jednu souřadnici zvolíme, druhou vypočítáme

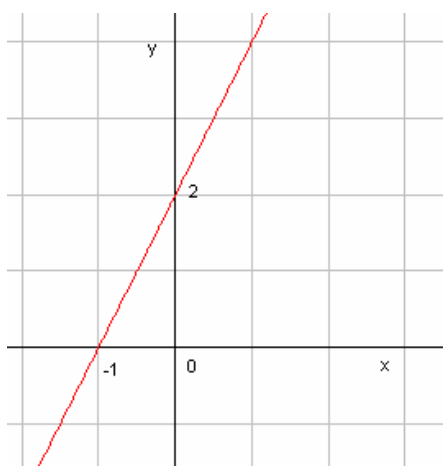
1.2 Lineární funkce

Postup při rýsování grafu lineární funkce

- Je zadána funkce předpisem $y = 2x + 2$
- Musíme nalézt dva body, kterými daná přímka prochází, např. průsečíky s osami
 - jestliže bod leží na ose x , je jeho y -ová souřadnice rovna nule, tedy za y v předpise dosadíme 0 a dopočítáme souřadnici x : $y = 0 \rightarrow 0 = 2x + 2$
 - od obou stran rovnice odečteme číslo 2: $-2 = 2x$
 - obě strany rovnice vydělíme číslem 2: $-1 = x$
 - souřadnice průsečíku s osou x jsou tedy $x = -1$, $y = 0$, píšeme $P_x = [-1; 0]$
pozn.: souřadnice bodů se píšou do hranatých závorek, nejdříve x , pak y
 - stejně vypočítáme druhý bod, kterým přímka prochází, průsečík s osou y

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- jestliže bod leží na ose y , pak je x -ová souřadnice rovna nule, tedy za x v předpise dosadíme 0 a dopočítáme souřadnici y : $x=0 \rightarrow y = 0 \cdot x + 2$, tedy $y = 2$
- souřadnice průsečíku s osou y jsou $x = 0$, $y = 2$, píšeme $P_y = [0; 2]$
- Body nanese do kartézského souřadnicového systému (dvě kolmé osy x , y)
- Narýsujeme přímku, která prochází oběma body



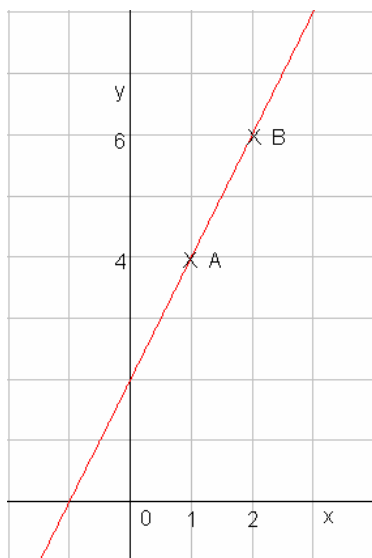
- dva libovolné body, kterými přímka prochází můžeme získat jednodušeji, jestliže si zvolíme za x např. 1, snadno dopočítáme z rovnice $y = 2x + 2$ $y: x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 + 2$

$$y = 4$$

jeden bod, kterým přímka prochází má
souřadnice $A = [1; 4]$

Za x si dále zvolíme např. 2: $x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 + 2$

$y = 6$ druhý bod, kterým přímka prochází má souřadnice
 $B = [2; 6]$

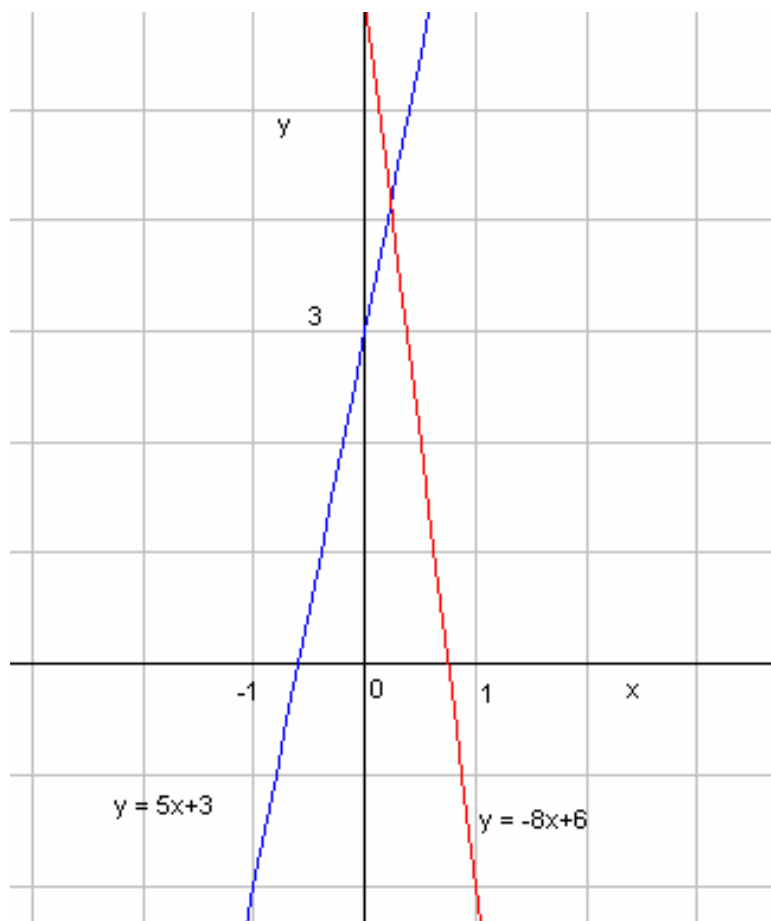


- vidíme, že graf funkce je stejný
- výhodou je, že si můžeme zvolit libovolné číslo

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vlastnosti

- u lineárních funkcí kromě definičního oboru a oboru hodnot určujeme monotónnost funkce (zda je funkce rostoucí nebo klesající)
- rostoucí funkce je např. $y = 5x+3$ a klesající funkce je např. $y = -8x+6$



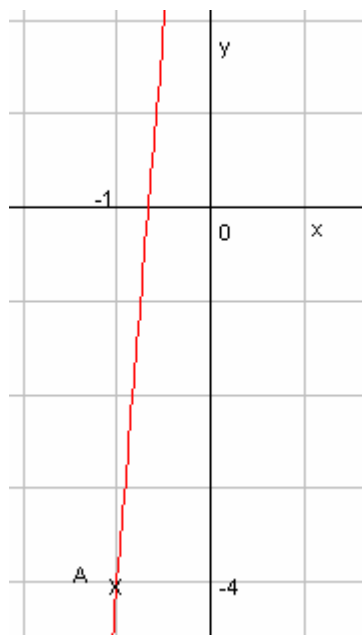
- Z grafu je patrné, že funkce je rostoucí, jestliže $a > 0$ (v tomto případě $a = 5$, což je větší než 0), klesající, jestliže $a < 0$ (v tomto případě $a = -8$, což je menší než 0), funkce roste nebo klesá v celém definičním oboru

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešené úlohy

1. Je zadána funkce $y = 12x + 8$, $x = -1$, dopočítejte y

- Jednoduše místo x napíšete -1 a vypočítáte : $y = 12 \cdot (-1) + 8$, tedy $y = -4$
- Co jste tím vlastně získali? Souřadnici jednoho bodu, kterým přímka prochází $A = [-1; -4]$



2. Je zadána funkce $y = -5x - 6$, $y = -1$, dopočítejte x

- Jednoduše místo y napíšete -1 a vypočítáte x : $-1 = -5x - 6$ $/+6$

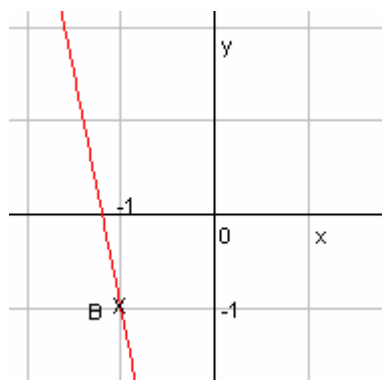
$$-1 + 6 = -5x$$

$$5 = -5x \quad /: (-5)$$

$$-1 = x$$

$$x = -1$$

- Získali jste souřadnice jednoho bodu, kterým přímka prochází $B = [-1; -1]$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. Narýsujte graf funkce $y = 3x - 5$, určete $D(f)$, $H(f)$, zda je rostoucí nebo klesající.

- Určení bodů, kterými graf prochází: $x = 0 \rightarrow y = 0 \cdot 3 - 5$

$$y = -5$$

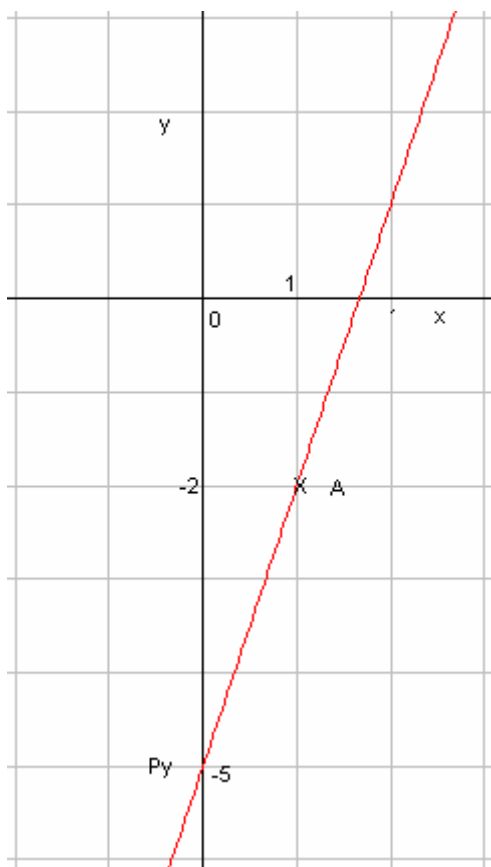
$$P_y = [0; -5]$$

$$x = 1 \rightarrow y = 3 \cdot 1 - 5$$

$$y = -2$$

$$A = [1; -2]$$

- Body nanese do kartézského souřadnicového systému
- Narýsujeme přímku, která prochází oběma body



- Protože není zadáno žádné omezení funkce (interval), pak je definičním oborem a oborem hodnot množina všech reálných čísel $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \mathbf{R}$
- Funkce je rostoucí (určíme buď z grafu, nebo z předpisu $y = 3x - 5$, $a = 3$, tedy $a > 0$) v celém definičním oboru (pořád roste, nikde neklesá)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4. Narýsujte graf funkce $y = -3x - 8$

- Určení bodů, kterými přímka prochází: $x = 0 \rightarrow y = -3 \cdot 0 - 8$

$$y = -8$$

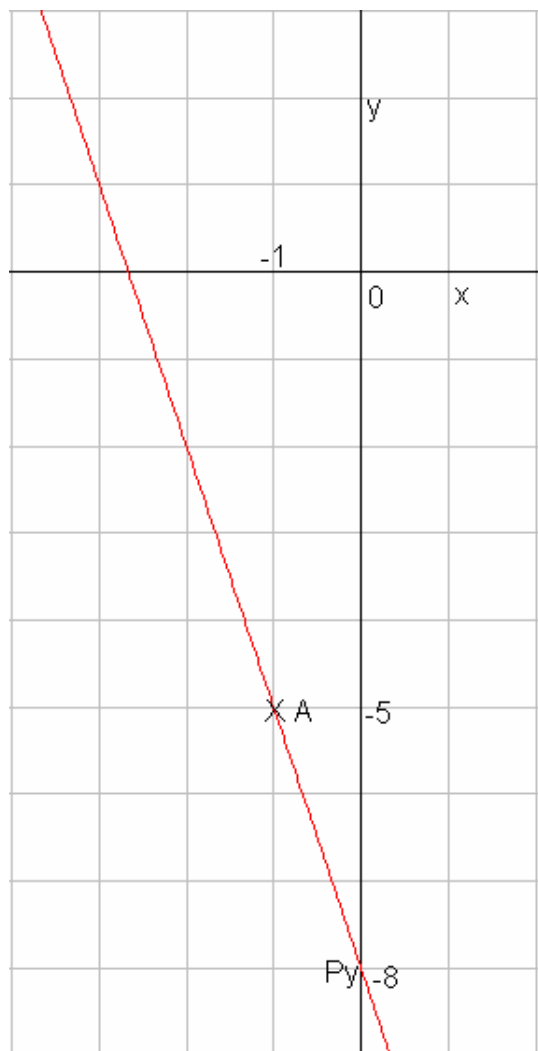
$$P_y = [0; -8]$$

$$x = -1 \rightarrow y = -3 \cdot (-1) - 8$$

$$y = -5$$

$$A = [-1; -5]$$

- Body nanese do kartézského souřadnicového systému
- Narýsujeme přímku, která prochází oběma body



- Protože není zadáno žádné omezení funkce (interval), pak je definičním oborem a oborem hodnot množina všech reálných čísel $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \mathbf{R}$
- Funkce je klesající v celém definičním oboru (určíme buď z grafu, nebo z předpisu $y = -3x - 8$, $a = -3$, $a < 0$)



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

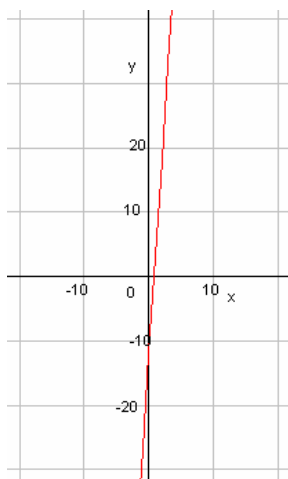
Úlohy k procvičování

- 1) Určete průsečíky s osami
 - a) $y = 15x - 12$
 - b) $y = -9x + 3$
 - c) $y = 8x + 4$
 - d) $y = -9x - 6$
- 2) Z funkčního předpisu určete monotónnost funkce (rostoucí, klesající)
 - a) $y = 15x - 12$
 - b) $y = -9x + 3$
 - c) $y = 8x + 4$
 - d) $y = -9x - 6$
- 3) Dopačítejte souřadnici y
 - a) $y = 15x - 12$, $x = 1$
 - b) $y = -9x + 3$, $x = -2$
- 4) Dopačítejte souřadnici x
 - a) $y = 8x + 4$, $y = 4$
 - b) $y = -9x - 6$, $y = 12$
- 5) Narýsujte graf funkce, určete definiční obor funkce, monotónnost funkce (nezapomeňte, že čísla za x si libovolně volíte)
 - a) $y = 15x - 12$
 - b) $y = -9x + 3$
 - c) $y = 8x + 4$
 - d) $y = -9x - 6$

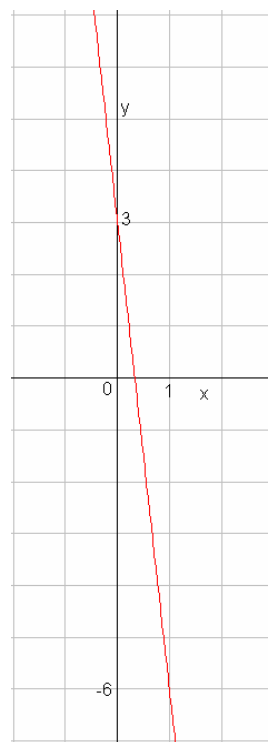
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výsledky

- 1) Určete průsečíky s osami
 - a) $P_y = [0; -12]$, $P_x = [12/15; 0]$
 - b) $P_y = [0; 3]$, $P_x = [1/3; 0]$
 - c) $P_y = [0; 4]$, $P_x = [-1/2; 0]$
 - d) $P_y = [0; -6]$, $P_x = [2/3; 0]$
- 2) Z funkčního předpisu určete monotónnost funkce (rostoucí, klesající)
 - a) $y = 15x - 12$, $a = 15$, $a > 0$ funkce je rostoucí
 - b) $y = -9x + 3$, $a = -9$, $a < 0$, funkce je klesající
 - c) $y = 8x + 4$, $a = 8$, $a > 0$ funkce je rostoucí
 - d) $y = -9x + 6$, $a = -9$, $a < 0$, funkce je klesající
- 3) Dopačítejte souřadnici y
 - a) $x = 1$, $y = 3$, $A = [1; 3]$
 - b) $x = -2$, $y = 21$, $A = [-2; 21]$
- 4) Dopačítejte souřadnici x
 - a) $y = 4$, $x = 0$, $A = [0; 4]$
 - b) $y = -12$, $x = -2$, $A = [-2; 12]$
- 5) Narýsujte graf funkce, určete definiční obor funkce, monotónnost
 - a) $y = 15x - 12$
 - b) $y = -9x + 3$



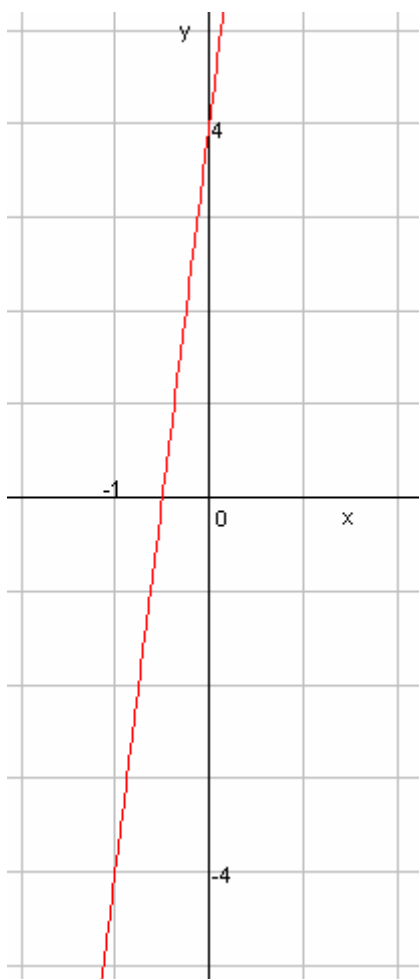
$D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \mathbf{R}$, funkce je rostoucí
v celém definičním oboru



$D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \mathbf{R}$, funkce je klesající
v celém definičním oboru

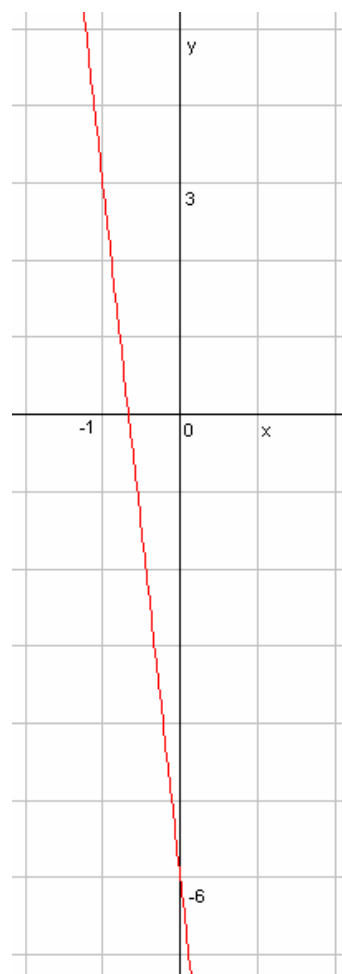
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

c) $y = 8x + 4$



$D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \mathbf{R}$, funkce je rostoucí
v celém definičním oboru

d) $y = -9x - 6$



$D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \mathbf{R}$, funkce je klesající
v celém definičním oboru

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

1.3 Lineární funkce s absolutní hodnotou

Lineární funkce s absolutní hodnotou

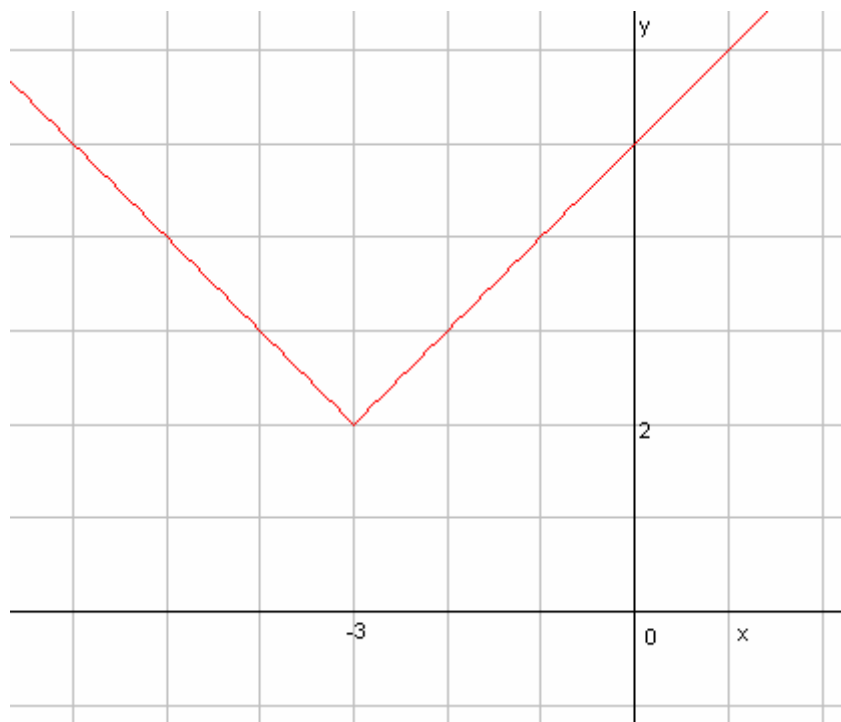
- Lineární funkce, která má ve funkčním předpise x v absolutní hodnotě
- Příklady lineárních funkcí s absolutní hodnotou: $y = 2|x|+3$, $y = |2x-8|$
- Definiční obor je opět množina reálných čísel $D(f) = \mathbf{R}$
- Oborem hodnot je interval (levým krajním bodem intervalu je y -ová souřadnice minima funkce, pravým krajním bodem intervalu je nekonečno)

Absolutní hodnota čísla

- Absolutní hodnota kladného čísla je kladné číslo: $a \geq 0$, pak $|a| = a$
- Absolutní hodnota záporného čísla je záporné číslo: $a < 0$, pak $|a| = -a$

Vlastnosti lineární funkce s absolutní hodnotou

- Minimum funkce je bod, ve kterém funkce nabývá nejmenší hodnoty (nejmenší y -ová souřadnice)
- Funkce je klesající v určitém intervalu (levým krajním bodem je mínus nekonečno, pravým krajním bodem intervalu je x -ová souřadnice minima funkce,
- Funkce je rostoucí v určitém intervalu (levým krajním bodem intervalu je x -ová souřadnice minima funkce, pravým nekonečno)
- Např. funkce $y = |x+3|+2$ má minimum v bodě $[-3;2]$, klesající je v intervalu $(-\infty;-3)$, rostoucí je v intervalu $\langle -3;\infty)$, $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle 2;\infty)$

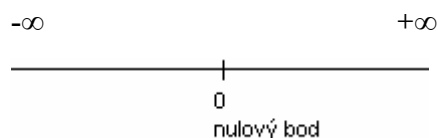


Pozn.: interval, ve kterém je funkce rostoucí, je uzavřený (vyplývá z definice absolutní hodnoty čísla)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Postup při rýsování grafu lineární funkce s absolutní hodnotou

- Je zadána funkce $y = 2|x|+2$
- Nejdříve musíme určit nulové body (výraz v absolutní hodnotě se rovná nule): $x = 0$,
- Nulový bod rozdělí definiční obor (osu x) na dva intervaly, vlevo od nulového bodu $I_1 = (-\infty; 0)$, vpravo od nulového bodu $I_2 = \langle 0; \infty$



- Dále musíme řešit zvlášť v prvním a zvlášť v druhém intervalu
- $I_1 = (-\infty; 0)$: jestliže leží x v tomto intervalu, pak nabývá záporných hodnot (zjistíme tak, že dosadíme libovolný bod z tohoto intervalu za x a sledujeme znaménko výrazu v absolutní hodnotě), chceme-li odstranit absolutní hodnotu, musí být celý výraz v absolutní hodnotě záporný (viz absolutní hodnota čísla):

$$y = 2 \cdot (-x) + 2$$

$$y = -2x + 2$$

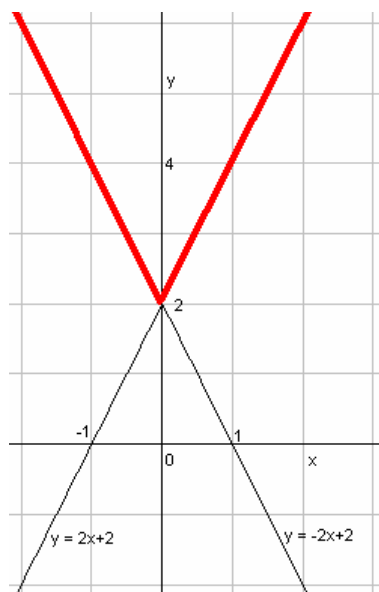
tuto lineární přímku narýsujeme do grafu

- $I_2 = \langle 0; \infty$: jestliže leží x v tomto intervalu, pak nabývá kladných hodnot (zjistíme tak, že dosadíme libovolný bod z tohoto intervalu za x a sledujeme znaménko výrazu v absolutní hodnotě), chceme-li odstranit absolutní hodnotu, musí být celý výraz v absolutní hodnotě kladný

$$y = 2x + 2$$

tuto lineární přímku narýsujeme do stejného grafu

- Zvýrazníme horní části obou přímek a graf lineární funkce s absolutní hodnotou je hotov



- Definičním oborem je množina reálných čísel $D(f) = \mathbb{R}$
- Oborem hodnot je interval $H(f) = \langle 2; \infty$
- Funkce je klesající v intervalu $(-\infty; 0)$
- Funkce je rostoucí v intervalu $\langle 0; \infty$
- x -ová souřadnice minima je rovna nulovému bodu, y -ovou souřadnici dopočítáme tak, že za x dosadíme do zadání nulový bod:

$$y = 2 \cdot 0 + 2$$

$$y = 2$$
 souřadnice minima funkce jsou $[0; 2]$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešené úlohy

1. Narýsujte graf funkce $y = 3|x| - 6$, určete souřadnice minima funkce, definiční obor, obor hodnot, intervaly, ve kterých je funkce rostoucí a klesající.

1) Zjistíme nulový bod (výraz v absolutní hodnotě je roven nule) : $x = 0$

2) Zjistíme intervaly: $I_1 = (-\infty; 0)$, $I_2 = (0; \infty)$

3) Zjistíme znaménko výrazu v absolutní hodnotě pro jednotlivé intervaly

$I_1 = (-\infty; 0)$: za x v absolutní hodnotě dosadíme např. -2 (musí patřit do daného intervalu)

$\rightarrow -2 < 0$, proto je první přímka grafu dána rovnicí $y = 3 \cdot (-x) - 6$

$y = -3x - 6$ tuto přímku narýsujeme do grafu

$I_2 = (0; \infty)$: za x v absolutní hodnotě dosadíme např. 2 (musí patřit do daného intervalu)

$\rightarrow 2 > 0$, proto je druhá přímka grafu dána rovnicí $y = 3 \cdot x - 6$ tuto přímku narýsujeme do grafu

4) Zjistíme souřadnice minima

x -ová souřadnice je rovna nulovému bodu $x = 0$

y -ovou souřadnici dopočítáme: $x = 0 \rightarrow y = 3 \cdot 0 - 6$

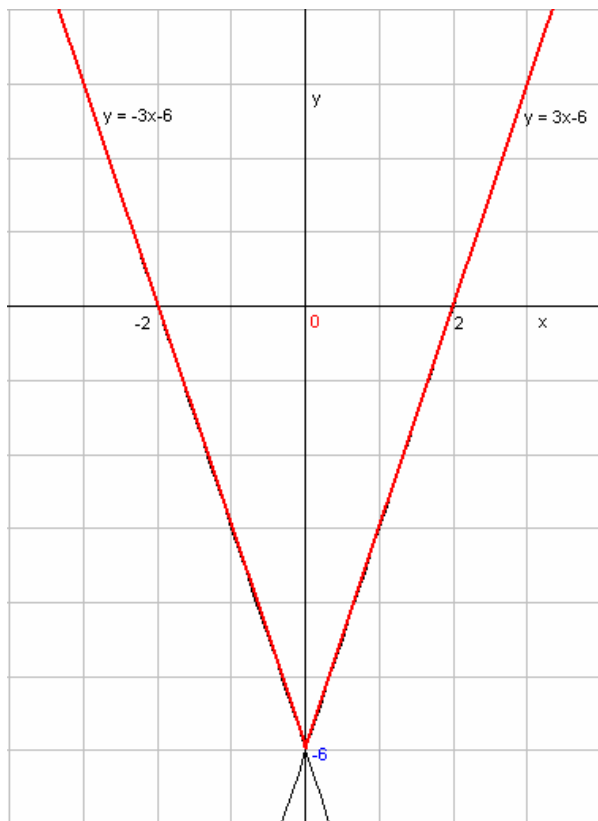
$$y = -6$$

souřadnice minima jsou $[0; -6]$

5) Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

6) Obor hodnot: $H(f) = [-6; \infty)$

7) Funkce je klesající v intervalu $(-\infty; 0)$ a rostoucí v intervalu $(0; \infty)$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2. Narýsujte graf funkce $y = |x+2|$, určete souřadnice minima funkce, definiční obor, obor hodnot, intervaly, ve kterých je funkce rostoucí a klesající.

- 1) Zjistíme nulový bod (výraz v absolutní hodnotě je roven nule) : $x+2 = 0$

$$x = -2$$

- 2) Zjistíme intervaly: $I_1 = (-\infty; -2)$, $I_2 = (-2; \infty)$

- 3) Zjistíme znaménko výrazu v absolutní hodnotě pro jednotlivé intervaly

$I_1 = (-\infty; -2)$: za x v absolutní hodnotě dosadíme např. -5 (musí patřit do daného intervalu)

$\rightarrow -5+2 = -3$, $-3 < 0$, proto je první přímka grafu dána rovnicí $y = -(x+2)$

$$y = -x-2$$

tuto přímku narýsujeme do grafu

$I_2 = (-2; \infty)$: za x v absolutní hodnotě dosadíme např. -1 (musí patřit do daného intervalu)

$\rightarrow -1+2 = 1$, $1 > 0$, proto je druhá přímka grafu dána rovnicí $y = +(x+2)$

$$y = x+2$$

tuto přímku narýsujeme do grafu

- 4) Zjistíme souřadnice minima

x -ová souřadnice je rovna nulovému bodu: $x = -2$

y -ovou souřadnici dopočítáme: $x = -2 \rightarrow y = -2+2$

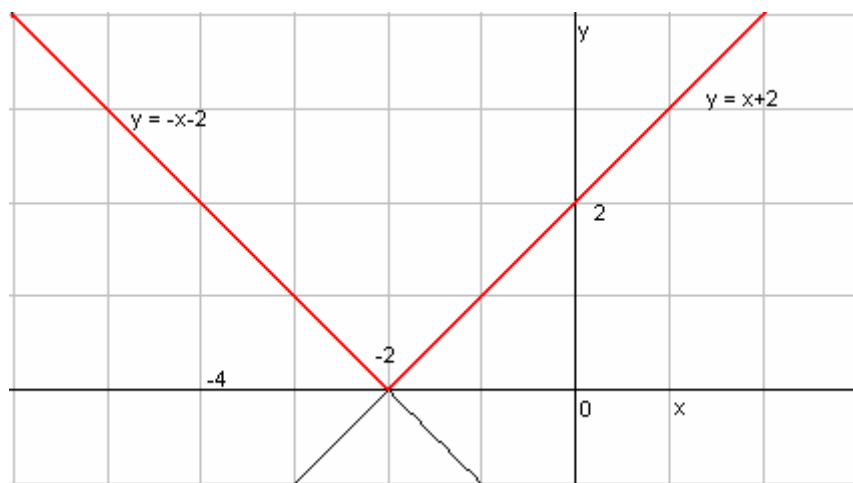
$$y = 0$$

souřadnice minima jsou $[-2; 0]$

- 5) Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

- 6) Obor hodnot: $H(f) = [0; \infty)$

- 7) Funkce je klesající v intervalu $(-\infty; -2)$ a rostoucí v intervalu $(-2; \infty)$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. Narýsujte graf funkce $y = |2x-4|+5$, určete souřadnice minima funkce, definiční obor, obor hodnot, intervaly, ve kterých je funkce rostoucí a klesající.

1) Zjistíme nulový bod (výraz v absolutní hodnotě je roven nule) : $2x-4 = 0 \quad /+4$

$$2x = 4 \quad /:2$$

$$x = 2$$

2) Zjistíme intervaly: $I_1 = (-\infty; 2)$, $I_2 = (2; \infty)$

3) Zjistíme znaménko výrazu v absolutní hodnotě pro jednotlivé intervaly

$I_1 = (-\infty; 2)$: za x v absolutní hodnotě dosadíme např. 1 (musí patřit do daného intervalu)

→ $2 \cdot 1 - 4 = -2$, $-2 < 0$, proto je první přímka grafu dána rovnicí $y = -(2x - 4) + 5$

$$y = -2x + 4 + 5$$

$$y = -2x + 9$$

tuto přímku narýsujeme do grafu

$I_2 = (2; \infty)$: za x v absolutní hodnotě dosadíme např. 3 (musí patřit do daného intervalu)

→ $2 \cdot 3 - 4 = 2$, $2 > 0$, proto je druhá přímka grafu dána rovnicí $y = +(2x - 4) + 5$

$$y = 2x - 4 + 5$$

$$y = 2x + 1$$

tuto přímku narýsujeme do grafu

4) Zjistíme souřadnice minima

x -ová souřadnice je rovna nulovému bodu: $x = 2$

y -ovou souřadnici dopočítáme: $x = 2 \rightarrow y = (2 \cdot 2 - 4) + 5$

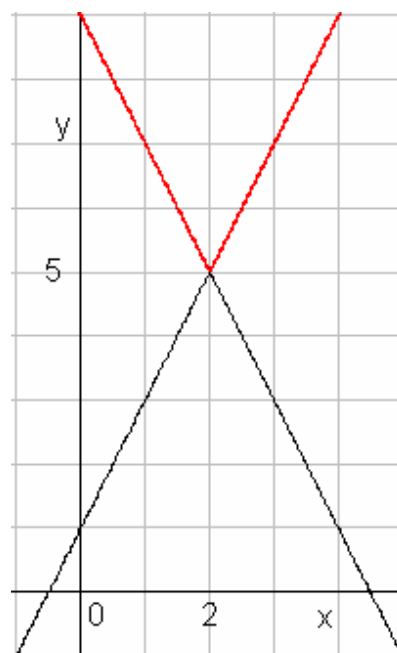
$$y = 5$$

souřadnice minima jsou $[2; 5]$

5) Definiční obor: $D(f) = \mathbf{R}$

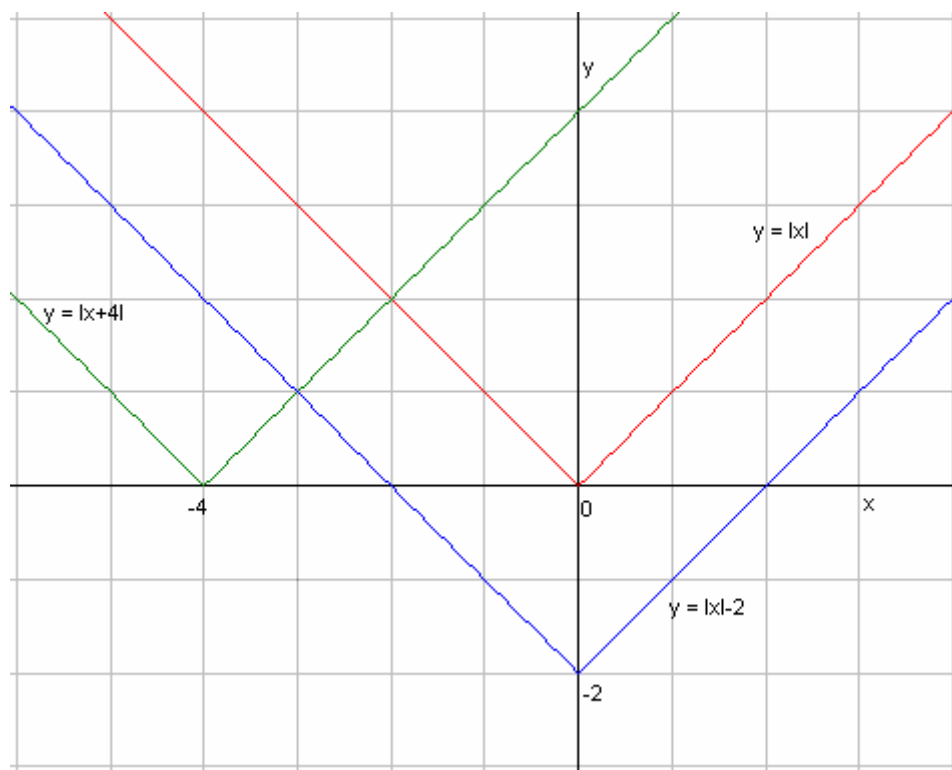
6) Obor hodnot: $H(f) = [5; \infty)$

7) Funkce je klesající v intervalu $(-\infty; 2)$ a rostoucí v intervalu $(2; \infty)$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4. Pozorně si prohlédněte grafy funkcí a zkuste vysvětlit, na čem závisí posunutí minima funkce



Úlohy k procvičování

- 1) Narýsujte graf funkce $y = |x - 5|$, určete souřadnice minima funkce, definiční obor, obor hodnot, intervaly, ve kterých je funkce rostoucí a klesající.
- 2) Narýsujte graf funkce $y = 5|x|+2$, určete souřadnice minima funkce, definiční obor, obor hodnot, intervaly, ve kterých je funkce rostoucí a klesající.
- 3) Narýsujte graf funkce $y = |x+3|+2$, určete souřadnice minima funkce, definiční obor, obor hodnot, intervaly, ve kterých je funkce rostoucí a klesající.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výsledky úloh

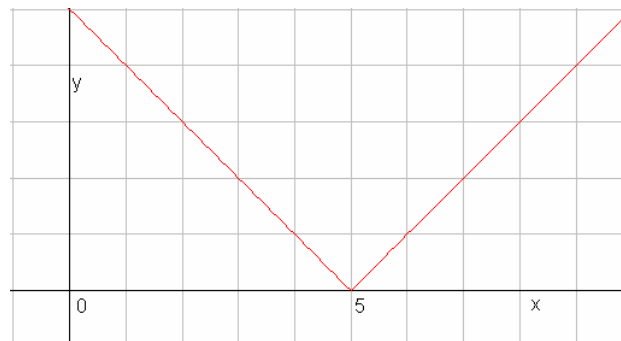
- 1) Souřadnice minima $[5;0]$

$$D(f) = \mathbf{R}$$

$$H(f) = \langle 0; \infty \rangle$$

Klesající v intervalu $(-\infty; 5)$

Rostoucí v intervalu $\langle 5; \infty \rangle$



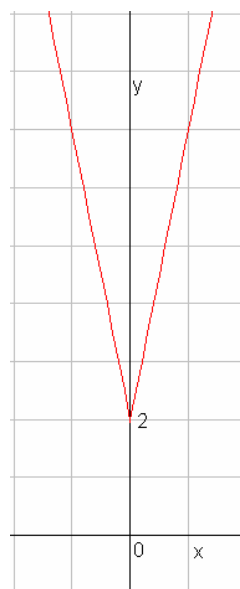
- 2) Souřadnice minima $[0;2]$

$$D(f) = \mathbf{R}$$

$$H(f) = \langle 2; \infty \rangle$$

Klesající v intervalu $(-\infty; 0)$

Rostoucí v intervalu $\langle 0; \infty \rangle$



- 3) Souřadnice minima $[-3;2]$

$$D(f) = \mathbf{R}$$

$$H(f) = \langle 2; \infty \rangle$$

Klesající v intervalu $(-\infty; -3)$

Rostoucí v intervalu $\langle -3; \infty \rangle$

