



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

URČITÝ INTEGRÁL

Motivace:

Pomocí určitého integrálu můžeme vypočítat:

- Obsah rovinného obrazce.
- Objem rotačního tělesa.
- Délku rovinné křivky.

Další využití určitého integrálu: ve fyzice, chemii, ekonomii ...

Historická poznámka:

- Definici určitého integrálu poprvé podal Gottfried Wilhelm Leibniz roku 1675.
- Leibniz také zavedl označení integrálu.
- K podobným závěrům došel i Isaac Newton, ale za svého života o tom nic neuveřejnil.
- Vztahem určitého integrálu a primitivní funkce se zabýval i Leonard Euler (18. století), z českých matematiků Matyáš Lerch a Karel Petr (konec 19. a začátek 20. století).

Teorie:

- Určitý integrál označujeme znakem $\int_a^b f(x)dx$.

Číslo **a** je **dolní integrační mez**, číslo **b** je **horní integrační mez**.

Interval $\langle a, b \rangle$ je integrační interval.

Funkce $f(x)$ je integrovaná funkce nebo-li **integrand**.

- Pro výpočet určitých integrálů používáme **Newton – Leibnizovu větu**:
Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v intervalu (a, b) primitivní funkci $F(x)$ spojitou v intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak existuje **určitý integrál** funkce $f(x)$ od **a** do **b**, pro nějž platí:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Výpočet určitého integrálu se takto převádí na určení primitivní funkce, do níž se za proměnnou dosadí postupně horní a dolní mez integrálu a výsledné hodnoty se v uvedeném pořadí odečtou.

- Existuje-li Newtonův určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$, říkáme, že **funkce f je integrovatelná**.
- Je třeba si uvědomit, že **určitý integrál je číslo** (na rozdíl od neurčitýho integrálu, který představuje množinu primitivních funkcí).

Vlastnosti určitého integrálu:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- Výměnou integračních mezí změní určitý integrál znaménko:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$$

- Integrační interval lze rozdělit na dvě (i více částí) tak, že horní mez jedné části je dolní mez druhé části:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

Výpočet určitého integrálu:

- Při jeho výpočtu používáme stejná pravidla jako při výpočtu neurčitého integrálu.
- Daný určitý integrál můžeme vypočítat nejdříve jako neurčitý a potom teprve do takto získané primitivní funkce dosadit příslušné meze. Běžnější je ale přímý výpočet, při němž nesmíme **při** každé **substituci** zapomenout **přepočítat meze**.
- Metoda per partes: $\int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$
- Při výpočtu určitého integrálu je třeba si vždy uvědomit, zda je funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a tím splněn předpoklad Newton-Leibnizovy věty. Jinak můžeme formálně zcela správným postupem dojít k naprosto nesprávnému výsledku.

Řešené úlohy:

Příklad 1.

Určete: $\int_{-1}^2 (x^2 - x + 5)dx$

Řešení:

$$\int_{-1}^2 (x^2 - x + 5)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 10 \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 5 \right) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 5 \right) =$$

integrováním jsme
dostali primitivní
funkci

dosadili jsme
horní mez

mínus

dosadili
jsme dolní
mez

$$= \frac{9}{3} - \frac{3}{2} + 15 = 18 - \frac{3}{2} = \frac{36-3}{2} = \frac{33}{2}$$

... **VÝSLEDEK**



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2:

Určete: $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx$

Řešení:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx =$$

Integrál budeme řešit substituční metodou.

Substitute:

$$\left| \begin{array}{ll} t = 2x & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right|$$

provedeme
substituci

musíme
přepočítat
meze

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx = \int_0^1 e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt =$$

dostali jsme
integrál
s přepočítanými
mezemi

$\frac{1}{2}$ dáme před integrál

$$= \frac{1}{2} [e^t]_0^1 = \frac{1}{2} (e - e^0) = \frac{1}{2} (e - 1) \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

integrováním
jsme dostali
primitivní funkci

v závorce je
dosazená horní
mez minus dolní
mez

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3:

Vypočtete: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

Řešení:

Integrál neexistuje, protože funkce $y = \frac{1}{x}$ není spojitá v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a tedy není integrovatelná. Viz věta Newton – Leibnizova.

Příklad 4:

Vypočtete: $\int_1^2 \frac{2x^2 + 1}{x} dx$

Řešení:

$$\int_1^2 \frac{2x^2 + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(2x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} + \ln|x| \right]_1^2 = [x^2 + \ln|x|]_1^2 = (4 + \ln 2) - (1 + \ln 1) = 3 + \ln 2$$

$$\ln 1 = 0$$

↑
výraz jsme
rozložili na 2
zlomky

↑
integrovali jsme
podle vzorců

↖
dosadili jsme horní mez
mínus dolní mez

↖
VÝSLEDEK

Příklad 5:

Vypočtete: $\int_1^{10} \sqrt{x-1} dx$

Řešení:

$$\int_1^{10} \sqrt{x-1} dx = \int_1^{10} (x-1)^{\frac{1}{2}} dx =$$

Integrál budeme řešit substituční metodou.

↑
odmocnina
převedená na
mocninu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Substitute:

$$\left| \begin{array}{ll} t = x - 1 & x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ dt = dx & x = 10 \Rightarrow t = 9 \end{array} \right|$$

provedeme
substituci

přepočítáme
meze

integrováním
jsme dostali
primitivní funkci

$$= \int_0^9 t^{\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^9 = \left[\frac{2 \cdot \sqrt{t^3}}{3} \right]_0^9 = \left[\frac{2t \cdot \sqrt{t}}{3} \right]_0^9 = \frac{2 \cdot 9 \cdot \sqrt{9}}{3} - \frac{0}{3} = \frac{18 \cdot 3}{3} = 18 \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

integrál
s přepočítanými
mezemi

upravený
zlomek a
mocnina
převedená na
odmocninu

částečné
odmocnění

dosazená horní mez mínus
dosazená dolní mez

Příklad 6:

Vypočtete: $\int_2^8 x \cdot e^x dx$

Integrál budeme řešit metodou per partes.

Řešení:

$$\int_2^8 x \cdot e^x dx = \left[\begin{array}{ll} u' = e^x & v = x \\ u = e^x & v' = 1 \end{array} \right] = [x \cdot e^x]_2^8 - \int_2^8 e^x dx = [x \cdot e^x]_2^8 - [e^x]_2^8 = 8 \cdot e^8 - 2 \cdot e^2 - (e^8 - e^2) =$$

metoda per partes

$[u \cdot v]_2^8$ mínus $\int_2^8 u \cdot v'$

dosadíme horní mez
mínus dolní mez

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$= 8 \cdot e^8 - 2 \cdot e^2 - e^8 + e^2 = 7e^8 - e^2 \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

Úlohy k procvičování:

$$1. \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx$$

$$2. \int_1^3 (2x^2 - 3x - 4) dx$$

$$3. \int_1^3 \frac{1}{1+x} dx$$

$$4. \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$5. \int_0^2 x \cdot \sqrt{4-x^2} dx$$

$$6. \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx$$

$$7. \int_0^\pi (2 \sin x + 3 \cos x) dx$$

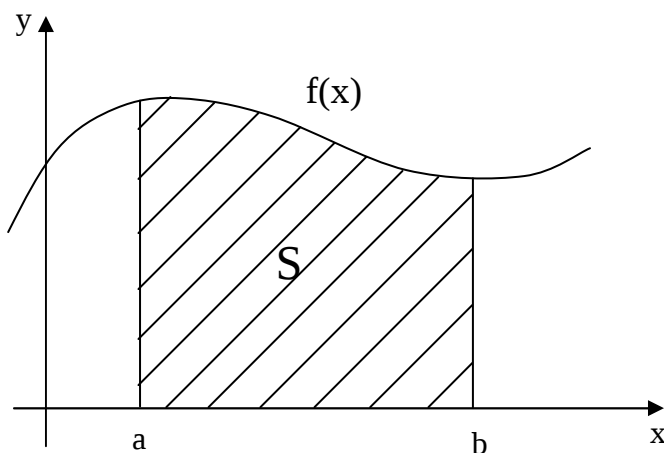
$$8. \int_1^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

Výsledky: 1. 1 2. -8/3 3. ln2 4. 3/2-ln2 5. 8/3 6. 1/6 7. 4 8. 64/3

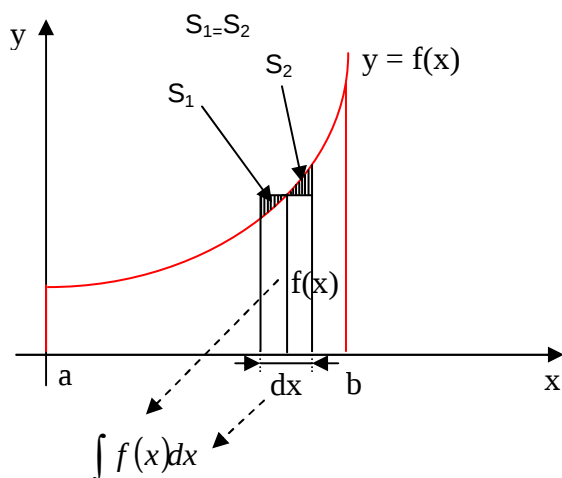
Obsah rovinného obrazce (kvadratura):

- Obsah rovinného obrazce je kladné číslo.
- Jestliže S_1 a S_2 jsou obsahy dvou obrazců, které se nepřekrývají, pak $S_1 + S_2$ je obsah obrazce, který je sjednocením těchto obrazců.

Pro případ, že $a < b$ a funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá a nezáporná, určitý integrál udává obsah útvaru, který je vymezen grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x=a$, $x=b$.



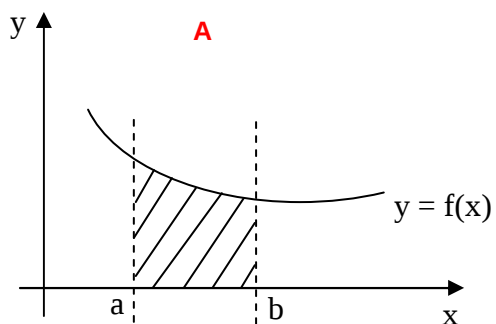
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



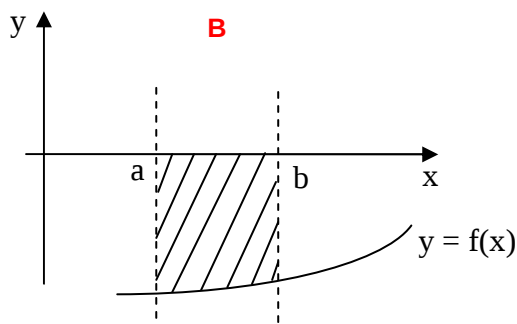
dx ... diferenciál

Součet obsahů všech obdélníků v intervalu $\langle a, b \rangle$ je roven $\int_a^b f(x) dx$.

Výpočet obsahu plochy ohraničené křivkou:



$$S = \int_a^b f(x) dx$$



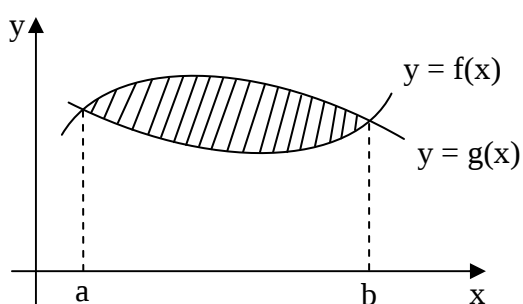
$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

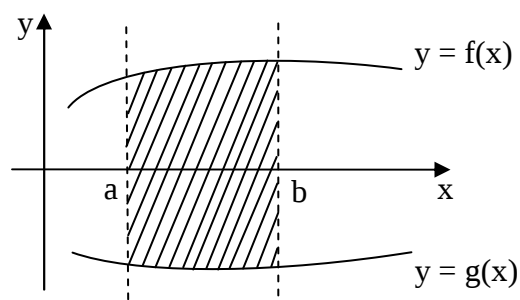
Výpočet obsahu plochy ohraničené dvěma křivkami:

A



$$f(x) \geq g(x)$$

B

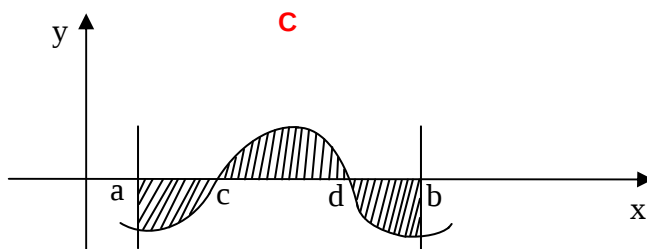


$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$S = \int_a^b f(x) dx + \left| \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

C



$$S = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \int_c^d f(x) dx + \left| \int_d^b f(x) dx \right|$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Postup při výpočtu obsahu plochy:

1. Načtneme graf funkce (funkcí) do soustavy souřadnic a určíme obrazec, jehož plocha se má vypočítat.
2. Zjistíme horní a dolní mez integrálu (x-ové souřadnice průsečíků funkcí, které ohraničují plochu).
3. Napíšeme vztah pro výpočet obsahu plochy pomocí určitého integrálu.
4. Vypočítáme určitý integrál.

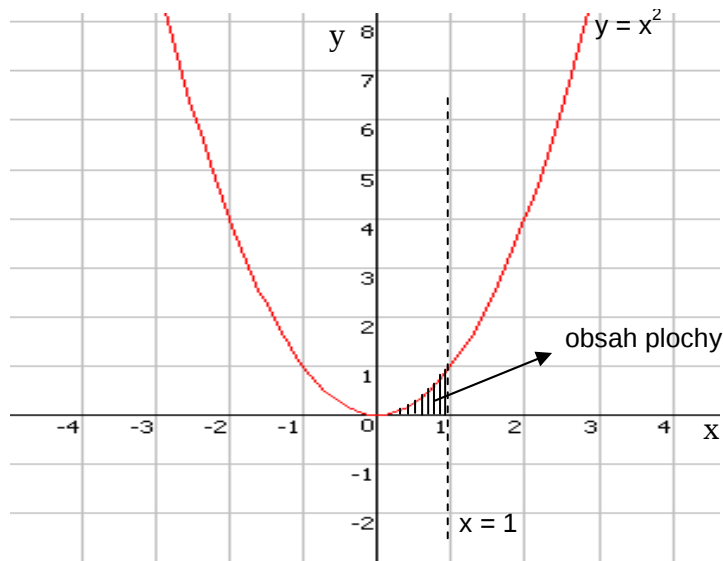
Řešené úlohy:

Příklad 1.

Vypočítejte obsah obrazce, který je ohraničen osou x, přímkou $x = 1$ a křivkou $y = x^2$.

Řešení:

1. Načtneme graf funkce $y = x^2$ a přímku $x = 1$.
2. Plochu, jejíž obsah máme určit, ohraničuje parabola, přímka a osa x.
3. Z náčrtu zjistíme horní mez (1) a dolní mez (0) integrálu.



4. Pomocí určitého integrálu vypočítáme obsah plochy:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0$$

$$S = \frac{1}{3} j^2 \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2:

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného čarami o rovnicích $y = x^2 - 2x$ a $x - y = 0$

Řešení:

1. a) Načtneme graf funkce $y = x^2 - 2x$

Nejdříve zjistíme vrchol paraboly (například z první derivace funkce):

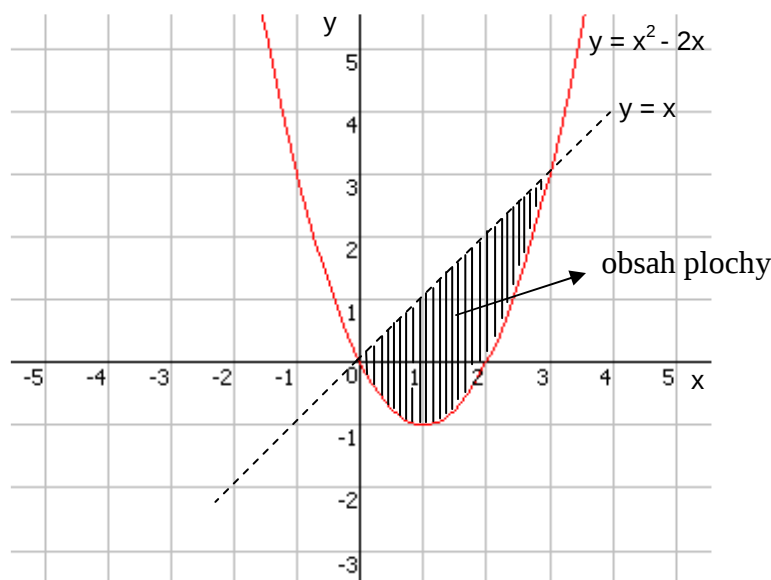
$$y' = 2x - 2$$

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Druhou souřadnici vrcholu vypočítáme ze zadané funkce: $y = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \Rightarrow V = [1, -1]$

b) Druhou rovnici vyjádříme ve tvaru $y = x$ a načtneme její graf ... je to osa 1. a 3. kvadrantu.

2. Plochu, jejíž obsah máme určit, ohraničuje parabola a přímka $y = x$.



Funkcí **f** je funkce $y = x$, funkcí **g** je funkce $y = x^2 - 2x$

3. Horní a dolní mez integrálu zjistíme jako průsečík funkce **f** a **g** $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic

$$y = x^2 - 2x$$

$$y = x$$

$$x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

4. Napíšeme vztah pro obsah plochy pomocí určitého integrálu a integrál vypočteme:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$S = \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (x - x^2 + 2x) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3$$

$$S = \left[3 \cdot \frac{9}{2} - \frac{27}{3} - 0 \right] = \frac{9}{2} \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

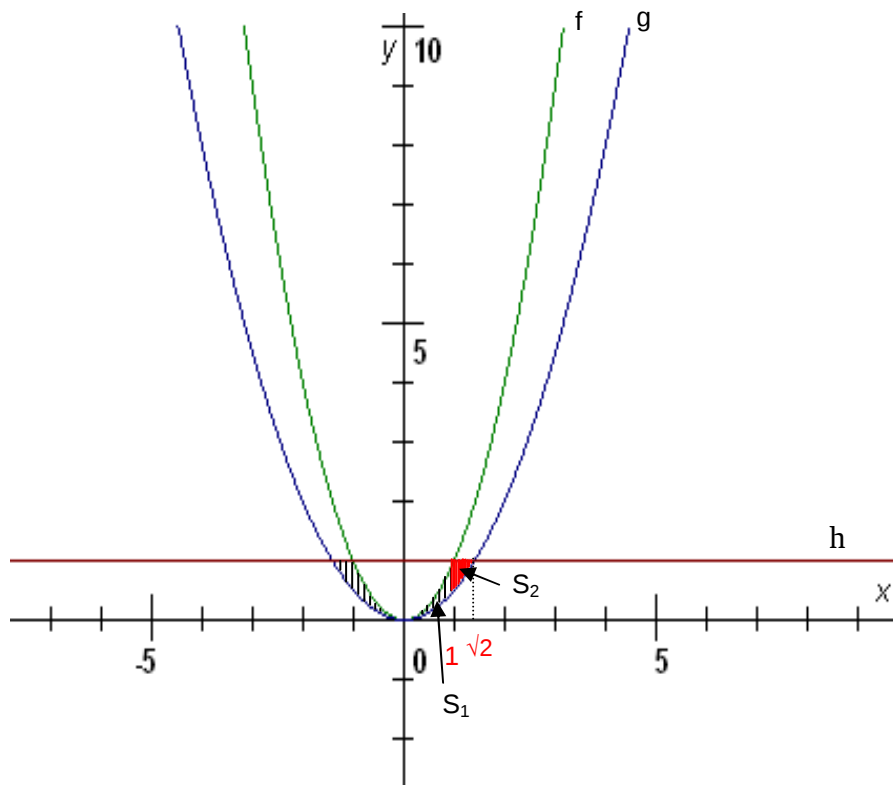
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3:

Vypočítejte obsah obrazce, který je ohraničen čarami o rovnicích $f: y = x^2$, $g: y = \frac{1}{2}x^2$, $h: y = 1$.

Řešení:

- a) Načtneme grafy funkcí $y = x^2$ a $y = \frac{1}{2}x^2$... grafem v obou případech je parabola otočená nahoru s vrcholem $V = [0,0]$.
- b) Načtneme graf funkce $y = 1$... grafem je přímka kolmá na osu y a procházející bodem $[0,1]$.
2. Máme vypočítat obsah vyšrafované plochy. Celý obrazec je souměrný podle osy $y \Rightarrow$ jsou jeho obě části (levá i pravá) shodné. Obsah obrazce vpravo od osy y je roven součtu obrazců o obsahu $S_1 + S_2$.



$$3. S_1 = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$$

$$S_1 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{6}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$g \cap h: y = \frac{1}{2}x^2$$

$$y = 1$$

Zjistíme průsečíky funkcí g a h řešením soustavy 2 rovnic.

$$1 = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{2}$$

... $\sqrt{2}$ je horní mezí integrálu, pomocí něhož vypočítáme S_2 .

$$S_2 = \int_1^{\sqrt{2}} [h(x) - g(x)] dx$$

$$S_2 = \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6}\right) - \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{6} j^2$$

Obsah celého obrazce:

$$S = 2(S_1 + S_2) = 2\left(\frac{1}{6} + \frac{4\sqrt{2} - 5}{6}\right) = \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{3} j^2 \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

Příklad 4:

Vypočítejte obsah obrazce omezeného křivkou $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$, osami x , y a přímkou $x = 7$.

Řešení:

1. a) Načtneme graf funkce $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$... kvadratická funkce, grafem je parabola.

Vrchol paraboly zjistíme například z první derivace funkce:

$$y' = -x + 3$$

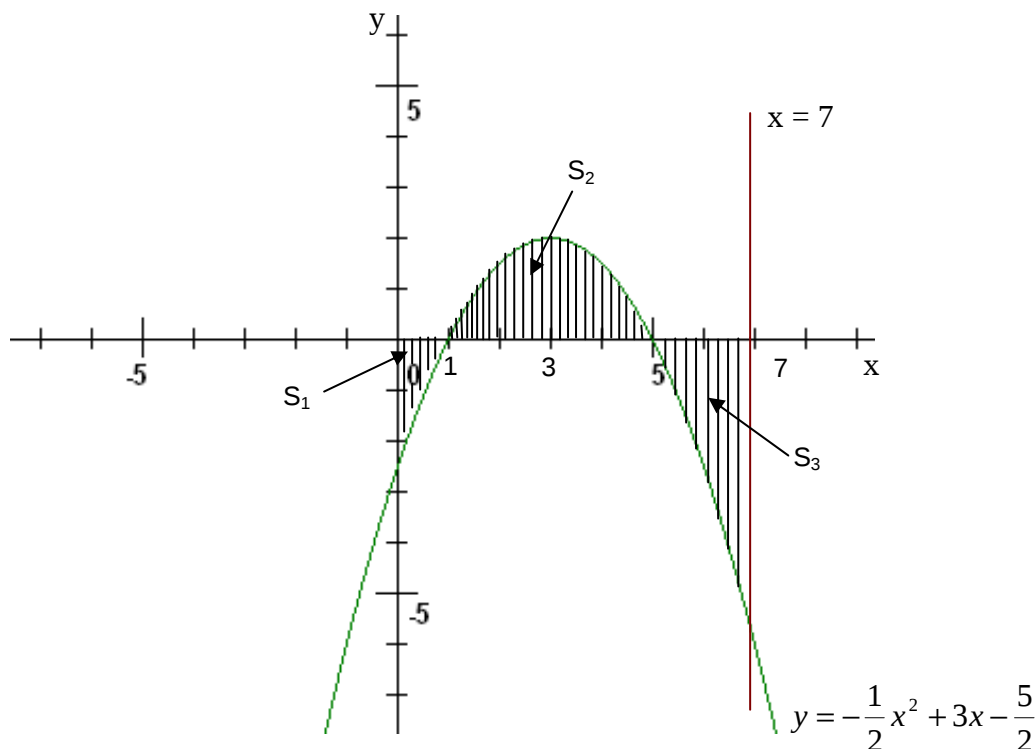
$$y' = 0 \Rightarrow -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Druhou souřadnici vrcholu vypočítáme ze zadané funkce: } y = -\frac{1}{2} \cdot 9 + 9 - \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow V = [3, 2]$$

b) Přímka $x = 7$ je kolmá na osu x a prochází bodem $[7, 0]$.

2. Plochu, jejíž obsah máme určit, ohraničuje parabola, osa x a y a přímka $x = 7$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



3. Zjistíme průsečíky paraboly s osou x (meze integrálů):

$$\cap x: \text{za } y \text{ dosadíme nulu do rovnice: } y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} \quad / \cdot 2$$

$$0 = -x^2 + 6x - 5 \quad / (-1)$$

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

$$0 = (x-1) \cdot (x-5) \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$$

4. $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$S_1 = -\int_0^1 f(x) dx = \left| \int_0^1 f(x) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} \right) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} x \right]_0^1 \right| = \left| -\frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} - 0 \right| = \left| -\frac{1}{6} - 1 \right| = \left| -\frac{7}{6} \right| = \frac{7}{6}$$

$$S_2 = \int_1^5 f(x) dx =$$

$$= \int_1^5 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{5}{2} x \right]_1^5 = \frac{-125}{6} + \frac{3 \cdot 25}{2} - \frac{25}{2} - \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right) =$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$= \frac{-125}{6} + \frac{75}{2} - \frac{25}{2} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{32}{6} j^2$$

$$S_3 = -\int_5^7 f(x) dx = \left| \int_5^7 f(x) dx \right| = \left| \int_5^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} \right) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - \frac{5}{2}x \right]_5^7 \right| =$$

$$= \left| \frac{-343}{6} + \frac{3 \cdot 49}{2} - \frac{35}{2} - \left(\frac{-125}{6} + \frac{75}{2} - \frac{25}{2} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{-343}{6} + \frac{147}{2} - \frac{35}{2} + \frac{125}{6} - \frac{75}{2} + \frac{25}{2} \right| = \left| \frac{-218}{6} + \frac{62}{2} \right| = \left| \frac{-218}{6} + \frac{186}{6} \right| = \frac{32}{6} j^2$$

$$S = \frac{7}{6} + \frac{32}{6} + \frac{32}{6} = \frac{71}{6} j^2 \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

Úlohy na procvičení:

1. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkou $y = x^2 - 2x - 4$, osou x a y a přímkou $x = 3$.
2. Vypočítejte obsah obrazce, který je omezen částí osy x a obloukem paraboly $y = 3x - x^2$.
3. Vypočítejte obsah obrazce, který je ohraničen obloukem paraboly $y = 4x^2 - 8x + 5$ a přímkou $2x - y + 1 = 0$.
4. Určete obsah obrazce omezeného parabolou $y^2 = 4x$ a přímkami $x = 4$, $x = 9$.
5. Vypočítejte obsah obrazce, který je ohraničen čarami $y = x^2 - 2x + 3$ a $y = 7 - x^2$.
6. Vypočítejte obsah obrazce, který je omezen částí osy x a obloukem paraboly $y = -x^2 + 2x$.
7. Určete obsah obrazce, který je ohraničen grafy funkcí $y = -x^2 + 4x - 2$ a $x + y = 2$.
8. Určete obsah obrazce omezeného křivkami $y = x^2 - 4x + 2$ a $y = -x^2 + 6x - 6$.

Výsledky: 1. $12 j^2$ 2. $9/2 j^2$ 3. $2,25 j^2$ 4. $152/3 j^2$ 5. $9 j^2$ 6. $4/3 j^2$ 7. $9/2 j^2$ 8. $9 j^2$

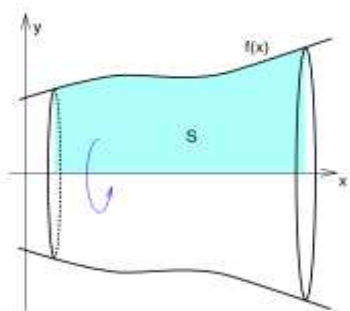
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Objem rotačního tělesa (kubatura):

- Uvažujeme rotační těleso, které vznikne rotací útvaru kolem osy x . Útvar je ohraničen grafem funkce $y = f(x)$ spojitě v intervalu $\langle a, b \rangle$.

- Vztah pro výpočet objemu rotačního tělesa: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$

- Rotační těleso, které vznikne rotací křivky $y = f(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$, kolem osy x :



Zdroj obr.: http://cs.wikipedia.org/wiki/Aplikace_integrálu

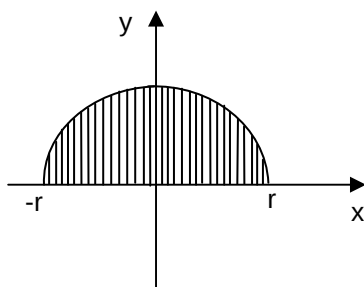
Řešené úlohy:

Příklad 1.

Odvodte vzorec pro objem koule o poloměru r .

Řešení:

1. Koule vznikne rotací kruhu o poloměru r kolem osy x . Střed kruhu umístíme do počátku souřadného systému. Stačí, když necháme rotovat jen půlkruh.



2. Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ vyjádříme $y^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$

3. Do vztahu pro výpočet objemu rotačního tělesa dosadíme druhou mocninu funkce a meze integrálu:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \cdot \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(-r^3 - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right]$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$V = \pi \cdot \left[2r^3 - \frac{r^3}{3} + \frac{(-r^3)}{3} \right] = \pi \cdot \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

Poznámka:

Při výpočtu integrálu si musíme uvědomit, že **neznámá je x , r je konstanta**.

Příklad 2.

Přímka $3x + 2y - 6 = 0$ se otáčí kolem osy x . Vypočítejte objem vzniklého rotačního tělesa pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

Řešení:

1. Z rovnice přímky vyjádříme y :

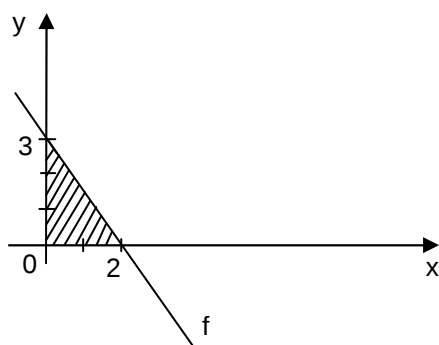
$$2y = -3x + 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

2. Načtneme graf funkce $f: y = -\frac{3}{2}x + 3$... Musíme zjistit souřadnice dvou bodů, které leží na grafu

funkce (jednu souřadnici zvolíme, druhou dopočítáme).

Výhodné je zvolit $y=0$, abychom zjistili průsečík s osou x .

x	0	2
y	3	0



3. Napíšeme vztah pro výpočet objemu rotačního tělesa:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

Meze integrálu zjistíme ze zadání.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \cdot \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x + 3 \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}x \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(9 - 9x + \frac{9}{4}x^2 \right) dx = \\
 &= \pi \cdot \left[9x - \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{4 \cdot 3} \right]_0^2 = \pi \cdot \left(18 - 9 \cdot 2 + \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{3} - 0 \right) = 6\pi \text{ j}^3 \quad \dots \text{ VÝSLEDEK}
 \end{aligned}$$

Příklad 3.

Vypočítejte objem tělesa, které získáme rotací oblouku $y = x^2 - 1$ kolem osy x .

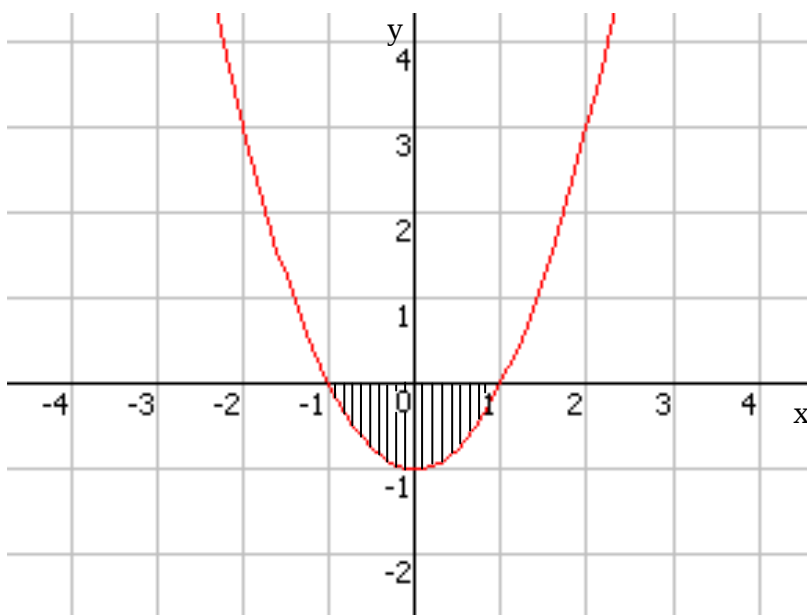
Řešení:

1. Načtneme graf funkce $y = x^2 - 1$:

a) Grafem je parabola otočená nahoru, vrchol má souřadnice $V = [0, -1]$

b) Zjistíme průsečíky paraboly s osou x :

$$\cap x: y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2. Objem tělesa vypočítáme podle vztahu: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = \pi \cdot \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} - 2 \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \\ &= \pi \cdot \left[\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right) \right] = \pi \cdot \left[\frac{3-10+15}{15} - \frac{(-3)+10-15}{15} \right] = \pi \cdot \frac{18-10+3-10+15}{15} = \\ &= \frac{16}{15} \cdot \pi j^3 \quad \dots \text{VÝSLEDEK} \end{aligned}$$

jiný způsob výpočtu:

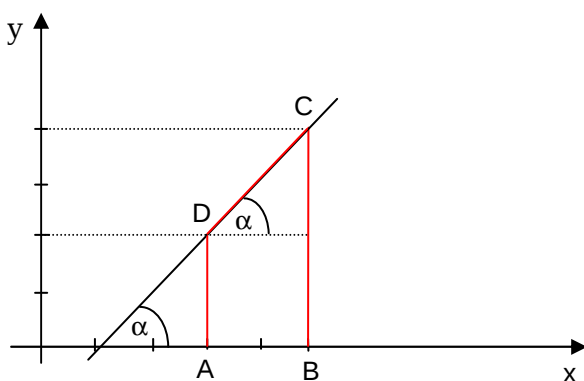
$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - 2 \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 - 0 \right] = \\ &= 2\pi \cdot \frac{8}{15} = \frac{16}{15} \pi j^3 \end{aligned}$$

Příklad 4.

Vypočtete objem komolého kužele, který vznikne rotací lichoběžníku ABCD kolem osy x, je-li $A = [3,0]$, $B = [5,0]$, $C = [5,4]$, $D = [3,2]$.

Řešení:

1. Do kartézské soustavy souřadnic vyznačíme body A, B, C a D, které tvoří pravoúhlý lichoběžník.



2. Napišeme rovnici přímky (např. směrnicový tvar), která prochází body C a D:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$$

k ... směrnice přímky

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$[x_1, y_1], [x_2, y_2] \dots$ souřadnice bodů, které leží na přímce

$$y - 4 = \frac{2 - 4}{3 - 5} \cdot (x - 5)$$

... rovnici upravíme

$$y - 4 = 1 \cdot (x - 5)$$

... vyjádříme proměnnou y

$$f: y = x - 1$$

3. Lichoběžník je ohraničen grafem funkce $y = x - 1$, jejíž druhá mocnina bude integrovanou funkcí. Meze integrálu jsou čísla 3 a 5 (viz obr.)

4. Vypočítáme objem tělesa:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot \int_3^5 (x-1)^2 dx = \pi \cdot \int_3^5 (x^2 - 2x + 1) dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_3^5 =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{125}{3} - 25 + 5 - \left(\frac{27}{3} - 9 + 3 \right) \right] = \pi \cdot \left(\frac{125}{3} - 20 - 3 \right) = \frac{56}{3} \cdot \pi \text{ j}^3 \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

Příklad 5:

Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného čarami $x^2 - y^2 = 4$, $x = 2$, $x = 4$ kolem osy x.

Řešení:

1. Křivkou omezující rotující útvar je rovnoosá hyperbola pro $x \in \langle 2, 4 \rangle$.
2. Z rovnice hyperboly vyjádříme y^2 a dosadíme do vzorce pro výpočet objemu:

$$x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = x^2 - 4$$

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot \int_2^4 (x^2 - 4) dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^4 = \pi \cdot \left[\frac{64}{3} - 16 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \right] =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{56}{3} - 8 \right) = \frac{32}{3} \pi \text{ j}^3 \quad \dots \text{VÝSLEDEK}$$

Poznámka:

Rovnice $x^2 - y^2 = 4$ je rovnicí hyperboly.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Převédeme ji na středový tvar (rovnici vydělíme čtyřmi).

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Střed hyperboly je $S = [0,0]$, poloosy $a = 2$, $b = 2$... rovnoosá hyperbola

Hlavní osa hyperboly je rovnoběžná s osou x .

Vrcholy hyperboly: $A = [2,0]$, $B = [-2,0]$

Úlohy na procvičení:

1. Odvoďte vzorec pro objem rotačního válce o výšce v a poloměru r .
2. Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací paraboly $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ okolo osy x .
3. Zobrazte rovinný obrazec, který je ohraničen čarami o rovnicích $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ a $y = 0$.
Určete objem tělesa vzniklého rotací tohoto obrazce kolem osy x .

Výsledky: 1. $\pi \cdot r^2 \cdot v$ 2. $\frac{1024}{15} \cdot \pi$ 3. $\frac{\pi \cdot (4\sqrt{3} - \pi)}{6}$