



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

INTERGRÁLNÍ POČET

Motivace:

Užití integrálního počtu spočívá mj. ve výpočtu obsahu rovinného obrazce ohraničeného různými funkcemi příp. čarami či ve výpočtu objemu rotačního tělesa, vzniklého rotací daného obrazce ohraničeného grafy funkcí kolem osy x . Než se k takovýmto úlohám dostaneme, je třeba si objasnit základní pojmy a pravidla související s prací s integrály.

PRIMITIVNÍ FUNKCE (neurčitý integrál)

Teorie:

Při řešení řady matematických úloh se setkáváme s problémy, v nichž známe derivaci $f(x)$ určité funkce $F(x)$ a máme tuto funkci $F(x)$ najít. $\Rightarrow$

$$F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = ?$$

Obrácený postup k derivování označujeme **integrování**.

Řešené úlohy:

Příklad 1.

Najděte rovnici křivky, jejíž tečna má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ směrnici $y = 2x$

Řešení:

Připomeneme si, co již známe z učiva diferenciálního počtu, zvláště z učiva geometrického významu derivace funkce. Víme, že první derivace funkce nám pomáhá určit směrnici tečny dané funkce v libovolném bodě x . (Pokud chceme najít rovnici tečny v daném bodě dotyku $T[x_0; y_0]$, pak první derivace funkce v bodě x_0 nám určí hodnotu směrnice tečny dané funkce právě v tomto bodě.)

$$\Rightarrow F'(x) = 2x$$

Derivací kterých elementárních funkcí dostaneme funkci $f(x)$: $y = 2x$???

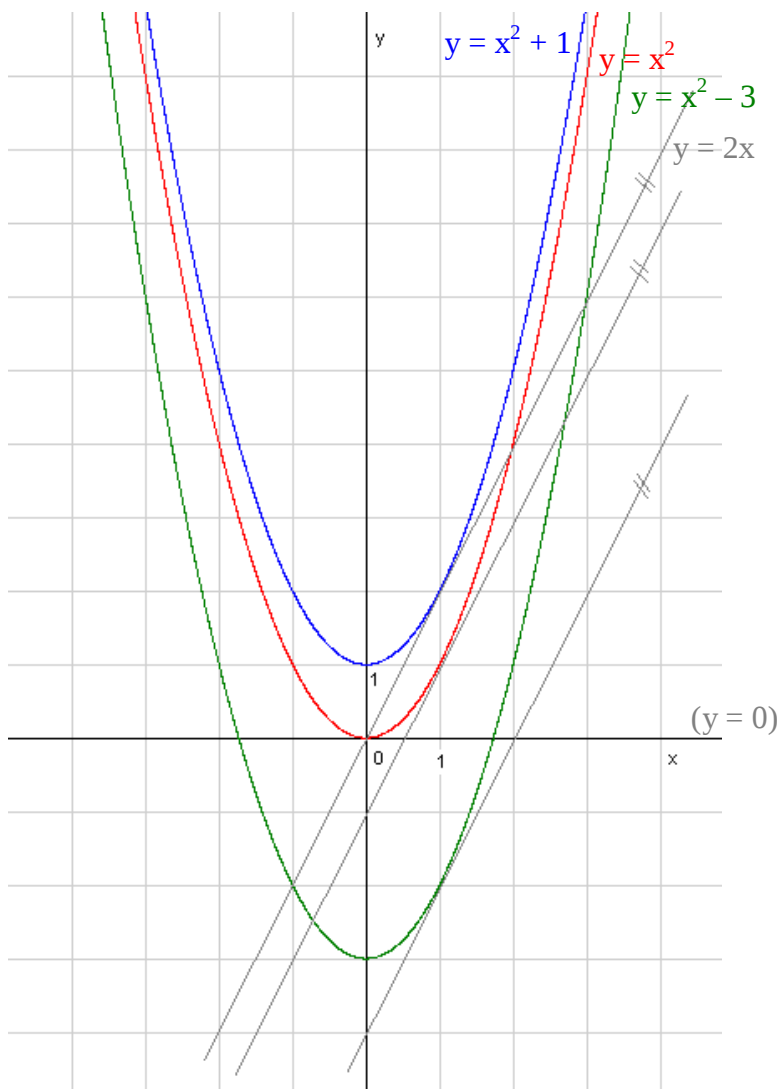
Je to například:

$$\begin{array}{llll} y = x^2 & , \text{ protože } (x^2)' = 2x & \Rightarrow & F_1(x) = x^2 \\ y = x^2 + 1 & , \text{ protože } (x^2 + 1)' = 2x & \Rightarrow & F_2(x) = x^2 + 1 \\ y = x^2 - 3 & , \text{ protože } (x^2 - 3)' = 2x & \Rightarrow & F_3(x) = x^2 - 3 \\ \dots & & & \\ \text{apod.} & & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ získáváme tak nekonečně mnoho funkcí $F(x)$, přičemž všechny se liší o určitou konstantu tzv. **integrační konstantu**.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Geometrická interpretace (pro lepší představu):



Např.:

- Každá tečna sestavená ke grafu příslušné funkce v bodě 1 (tj. dotykový bod tečny ke křivce má $x = 1$) má směrnici $k = 2 \cdot 1 = 2$ (viz obrázek) – všechny takovéto tečny jsou rovnoběžné s přímkou o rovnici $y = 2x$;
- Každá tečna sestavená ke grafu příslušné funkce v bodě 0 (tj. dotykový bod tečny ke křivce má $x = 0$) má směrnici $k = 2 \cdot 0 = 0$ – všechny takovéto tečny jsou rovnoběžné s osou x (přímka o rovnici $y = 0$);
- atd.

Dostáváme se tak k definici primitivní funkce, tedy neurčitého integrálu.

Teorie:

Definice:

Je dána funkce $f(x)$, která je definována v intervalu $(a;b)$. Funkci $F(x)$ nazveme **primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $(a;b)$** nebo také **neurčitým integrálem funkce $f(x)$ v intervalu $(a;b)$** , jestliže pro všechna $x \in (a;b)$ platí: $F'(x) = f(x)$.

Tento neurčitý integrál zapisujeme: $\int f(x)dx = F(x) + c$

znak integrálu

integrovaná funkce (integrand)

primitivní funkce

integrační konstanta



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výrazem **dx** připomínáme, že písmeno x vyjadřuje argument, jemuž v tomto případě říkáme integrační proměnná.

Z kapitoly o diferenciálním počtu víme, že je-li c libovolná konstanta, pak derivace $(c)' = 0$ a také $[F(x) + c]' = F'(x) + 0 = F'(x)$

Závěrem: $F(x) + c$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$.

Jak už jsme ukázali u příkladu 1. $\Rightarrow$ platnost věty: Ke každé funkci $f(x)$, která je v intervalu $(a;b)$ spojitá existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí lišících se o konstantu.

Řešené úlohy:

Příklad 2.

Ověřte správnost uvedených integrálů derivováním pravé strany rovností:

$$a) \int \frac{4(x-1)}{2x^2 - 4x + 3} dx = \ln|2x^2 - 4x + 3| + c$$

$$b) \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$c) \int \frac{2x^2(6-x)}{(4-x)^2} dx = \frac{x^3}{4-x} + c$$

Řešení:

(a)

Pravou stranu rovnosti derivujeme člen po členu, přičemž přirozený logaritmus dané funkce derivujeme jako funkci složenou !

$$\begin{aligned} (\ln|2x^2 - 4x + 3| + c)' &= (\ln|2x^2 - 4x + 3|)' + (c)' = \frac{1}{2x^2 - 4x + 3} \cdot (2 \cdot 2x - 4) + 0 = \frac{1}{2x^2 - 4x + 3} \cdot (4x - 4) = \\ &= \frac{4 \cdot (x-1)}{2x^2 - 4x + 3} \quad \text{což bylo dokázat (cbd)} \end{aligned}$$

(b)

Pravou stranu rovnosti derivujeme podle pravidel pro derivování základních funkcí člen po členu!

$$(\operatorname{tg} x - x + c)' = (\operatorname{tg} x)' - (x)' + (c)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 0 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \quad (\text{cbd})$$

(c)

Zlomek na pravé straně původní rovnosti derivujeme podle vzorce pro derivaci podílu funkcí !

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\left(\frac{x^3}{4-x} + c \right)' = \left(\frac{x^3}{4-x} \right)' + (c)' = \frac{(x^3)' \cdot (4-x) - x^3 \cdot (4-x)'}{(4-x)^2} + 0 = \frac{3x^2 \cdot (4-x) - x^3 \cdot (-1)}{(4-x)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 - 3x^3 + x^3}{(4-x)^2} = \frac{12x^2 - 2x^3}{(4-x)^2} = \frac{2x^2(6-x)}{(4-x)^2} \quad (\text{cbd})$$

Příklad 3.

Najděte primitivní funkci k funkci:

- a) $y = 2x$
- b) $y = x$
- c) $y = 3x^2$
- d) $y = x^2$
- e) $y = x^n$

Řešení:

- (a) Protože $(x^2 + c)' = 2x + 0 = 2x$, je primitivní funkcí k funkci $y = 2x$ funkce $y = x^2 + c$
- (b) Protože $\left(\frac{x^2}{2} + c \right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x + 0 = x$, je primitivní funkcí k funkci $y = x$ funkce $y = \frac{x^2}{2} + c$
- (c) Protože $(x^3 + c)' = 3x^2 + 0 = 3x^2$, je primitivní funkcí k funkci $y = 3x^2$ funkce $y = x^3 + c$
- (d) Protože $\left(\frac{x^3}{3} + c \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$, je primitivní funkcí k funkci $y = x^2$ funkce $y = \frac{x^3}{3} + c$
- (e) Protože $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{n+1-1} + 0 = x^n$, je primitivní funkcí k funkci $y = x^n$
funkce $y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

Příklad 4.

Dokažte, že funkce $y = \frac{\sin^2 x}{2}$ a $y = -\frac{\cos 2x}{4}$ jsou primitivní funkce k funkci $y = \sin x \cdot \cos x$

Řešení:

Dokážeme, že platí:

- a) $\left(\frac{\sin^2 x}{2} \right)' = \sin x \cdot \cos x$
- b) $\left(-\frac{\cos 2x}{4} \right)' = \sin x \cdot \cos x$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

a) $\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 x)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$

Zlomek derivujeme podle vzorce **konstanta krát derivace funkce** $\sin^2 x$, kterou však derivujeme jako funkci složenou

Konstantu opišeme a násobíme ji derivací složené funkce $\sin^2 x$

Derivace složené funkce $\sin^2 x$

b) $\left(-\frac{\cos 2x}{4}\right)' = -\frac{1}{4} \cdot (\cos 2x)' = -\frac{1}{4} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \sin x \cdot \cos x) = \sin x \cdot \cos x$

Zlomek derivujeme podle vzorce **konstanta krát derivace funkce** $\cos 2x$, kterou však derivujeme jako funkci složenou

Konstantu opišeme a násobíme ji derivací složené funkce $\cos 2x$

Derivace složené funkce $\cos 2x$

Užití vzorce $\sin 2x$

Dokázali jsme, že obě funkce jsou primitivními funkcemi k dané funkci. To znamená, že obě funkce se liší o určitou konstantu. O jakou konstantu se tyto funkce liší?

Řešení:

Vybereme si jednu funkci (výraz) a snažíme se ji upravit tak, až se dopočteme k předpisu druhé funkce plus (mínus) nějaká reálná konstanta. Využíváme přitom znalostí goniometrických vzorců:

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ a jednotkové rovnice $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Úpravami pak dostáváme toto řešení:

$$-\frac{\cos 2x}{4} = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4} = -\frac{(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x}{4} = -\frac{1 - 2\sin^2 x}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{2\sin^2 x}{4} = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\cos 2x}{4} = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Ukázali jsme, že obě funkce se od sebe liší o reálnou konstantu } \left(-\frac{1}{4}\right).$$

Úlohy k procvičování:

Ukažte, že funkce $F(x): y = -\frac{\cos^2 x}{4}$ a $G(x): y = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin^4 x}{4}$ jsou primitivní funkce k funkci $f(x): y = \sin x \cdot \cos^3 x$ a najděte konstantu, o kterou se tyto funkce liší.

Výsledek:

Návod: Funkce $F(x)$ a $G(x)$ derivujeme tak dlouho, až se dopočteme funkce $f(x)$. Následně funkci $F(x)$ upravujeme tak, abychom ji zapsali jako $F(x) = G(x) + c$; $c = -\frac{1}{4}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VZORCE PRO INTEGROVÁNÍ

Ve všech níže uváděných vzorcích je c reálná konstanta

$$(1) \int 0 dx = c \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$(2) \int dx = \int 1 dx = \int x^0 dx = x + c \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$(3) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad x \in (0; +\infty); n \in \mathbb{R}; n \neq -1$$

$$(4) \int \sin x dx = -\cos x + c \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$(5) \int \cos x dx = \sin x + c \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$(6) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \quad x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$(7) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + c \quad x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$$

$$(8) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad x \neq 0$$

$$(9) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \quad f(x) \neq 0$$

$$(10) \int e^x dx = e^x + c \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(11) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad a \in (0; 1) \cup (1; +\infty); x \in \mathbb{R}$$

INTEGRAČNÍ PRAVIDLA

- 1) **Integrál konstanty násobené derivací funkce** řešíme tak, že **konstantu opišeme a násobíme ji integrací dané funkce**, kterou provádíme pomocí vzorců pro integrování ! Tj.

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad k \in \mathbb{R}$$

- 2) **Funkční mnohočlen integrujeme člen po členu ! Tj.**

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešené úlohy:

Příklad 5.

Integrujte !

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + c$$

použijeme vzorec pro integrování mocninné

funkce (3) a výslednou funkci upravíme

$$\int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$x \neq 0$; použijeme vzorec pro integrování

mocninné funkce (3) a výslednou funkci upravíme

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + c$$

$x \neq 0$; odstraníme zlomek tím, že integrovanou

funkci upravíme pomocí pravidel pro počítání s mocninami; pak k integraci použijeme vzorec pro integrování mocninné funkce (3) a výslednou funkci upravíme

$$\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} = \frac{3}{4} x \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$x \in (0; \infty)$; použijeme vzorec pro integrování

mocninné funkce (3) a výslednou funkci upravíme

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$x \in (0; \infty)$; odmocninu převedeme na mocninu

a odstraníme zlomek pomocí pravidel pro počítání s mocninami; následně použijeme k integraci vzorec pro integrování mocninné funkce (3) a výslednou funkci upravíme

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 6.

Integrujte funkční mnohočleny !

$$\int (x^4 - x^2 + 1)dx = \int x^4 dx - \int x^2 dx + \int 1 dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x + c$$

funkci integrujeme člen po členu (pravidlo 2)
jednotlivé členy podle vzorce pro integrování
mocninné funkce (3) a podle vzorce (2)

$$\begin{aligned} \int (\sqrt[3]{x} - 2x^3)dx &= \int (x^{\frac{1}{3}} - 2x^3)dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx - 2 \int x^3 dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - 2 \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{2} = \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{x^4}{2} = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} - \frac{x^4}{2} + c \end{aligned}$$

$x \in (0; \infty)$; integrovanou funkci nejprve upravíme
převodem odmocniny na mocninu a při
integrování použijeme pravidel 1 a 2 a vzorce (3).
Po integraci výslednou funkci upravíme.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{4}{\sqrt{3x}} + 2 \right) dx &= \int \left(\frac{4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x}} + 2 \right) dx = \int \left(\frac{4}{\sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}}} + 2 \right) dx = \int \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 2x = \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \sqrt{x} + 2x = \frac{8\sqrt{x}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 2x = \frac{8\sqrt{3x}}{3} + 2x + c \end{aligned}$$

$x \in (0; \infty)$; nejprve si ujasníme, které konstanty
se nachází před jednotlivými členy integrované
funkce; konstanty předsuneme před jednotlivé
členy mnohočlenu; odmocniny převedeme na
mocniny a odstraníme u nich zlomky převedením
na záporný exponent; k integraci použijeme
pravidel 1 a 2 a vzorce (3); výslednou funkci
upravíme.

$$\int \frac{1}{2} (e^x + 1) dx = \frac{1}{2} \int (e^x + 1) dx = \frac{1}{2} (e^x + x) + c$$

konstantu předsuneme před integrál (pravidlo 1) a

zbylou funkci integrujeme pomocí základních
vzorců (10), (2) jako člen po členu (pravidlo 2)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \frac{e^{2x} - e^x}{e^x} dx = \int \frac{e^x \cdot (e^x - 1)}{e^x} dx = \int (e^x - 1) dx = \underline{\underline{e^x - x + c}}$$

funkci nejprve upravíme vytknutím e^x před závorku a následným krácením; dále použijeme k integraci základních vzorců pro integrování (10), (2)

Příklad 7.

Integrujte !

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int (x^{\frac{1}{2}} - 2x) \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = \int (x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}) dx = \int (x^{\frac{3-2}{6}} - 2x^{\frac{3-1}{3}}) dx = \int (x^{\frac{1}{6}} - 2x^{\frac{2}{3}}) dx = \\ &= \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{2 \cdot 3}{5} \sqrt[3]{x^5} = \underline{\underline{\frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} - \frac{6}{5} x \sqrt[3]{x^2} + c}} \end{aligned}$$

$x \in (0; \infty)$; integrovanou funkci nejprve upravíme zbavením se výrazů s odmocninami jejich převedením na mocniny a odstraněním zlomku; vzniklou závorku roznásobíme a opět použijeme pravidla pro počítání s mocninami; vzniklý výraz zjednodušíme a dále integrujeme užitím pravidel 1, 2 a vzorce (3). Výslednou funkci upravíme.

$$\begin{aligned} \int (x + \frac{1}{x^2})^2 dx &= \int (x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}) dx = \int (x^2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}) dx = \int x^2 dx + 2 \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-4} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 2 \ln|x| + \frac{x^{-3}}{-3} = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + 2 \ln|x| - \frac{1}{3x^3} + c}} \end{aligned}$$

$x \neq 0$; integrovanou funkci upravíme umocněním podle vzorce $(a + b)^2$ a vzniklý mnohočlen integrujeme člen po členu s použitím pravidel 1 a 2

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 8.

Integrujte !

$$\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5^x}}{\ln 1 - \ln 5} = \frac{5^{-x}}{-\ln 5} = -\frac{1}{5^x \cdot \ln 5} + c$$

při integraci použijeme vzorec (11) a znalosti logaritmů získaných při studiu učiva matematiky 2. ročníku (věty o logaritmech a přirozený logaritmus; $\ln 1 = 0$)

$$\int \frac{2}{2x+3} dx = \int \frac{(2x+3)'}{2x+3} dx = \underline{\underline{\ln|2x+3| + c}}$$

$x \neq -\frac{3}{2}$; v předpisu integrované funkce si

všimneme, že se v čitateli nachází derivace jmenovatele a proto k výpočtu integrálu můžeme použít vzorec (9)

$$\int \frac{3}{2x+1} dx = \int \frac{3}{2x+1} \cdot \frac{2}{2} dx = \int \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2x+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{(2x+1)'}{2x+1} dx = \underline{\underline{\frac{3}{2} \cdot \ln|2x+1| + c}} \quad ; x \neq -\frac{1}{2}$$

Pokud se ve výrazu integrované funkce nachází v čitateli mnohočlen o jeden stupeň nižšího řádu než ve jmenovateli, pak lze často k výpočtu použít vzorce (9):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

nebo lze takovýto výraz na použití výše uvedeného vzorce vhodnou úpravou převést.

Protože $(2x+1)' = 2$ a v našem výrazu se v jeho čitateli nachází konstanta 3, rozšíříme čítele i jmenovatel původního zlomku vhodnou konstantou (v našem případě je vynásobíme konstantou 3). Touto úpravou do čitatele zlomku dostaneme výraz, který je roven derivaci jmenovatele a dále pak můžeme k výpočtu použít vzorce (9):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Uvědomíme si, co v upraveném výrazu tvoří konstantu a která část výrazu reprezentuje zmíněný vzorec (9); výraz vhodně zapíšeme.

Konstantu předsuneme před integrál (pravidlo 1) a násobíme ji integrálem upravené funkce, která představuje vzorec (9). Vypočteme.

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} dx = \underline{\underline{\ln|1+\sin x| + c}}$$

$(\sin x \neq -1) \Rightarrow x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$;

postupujeme obdobně jako v předcházejících dvou příkladech

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c$$

$$(\cos x \neq 0) \Rightarrow x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

postupujeme obdobně jako v předchozích třech příkladech

Uvědomíme si, že do čitatele zlomku lze opět vhodnou úpravou dostat derivaci jmenovatele a použít tak vzorec (9):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

Protože $(\cos x)' = -\sin x$, rozšíříme čitatele i jmenovatele vhodnou konstantou tj. vynásobením konstantou (-1) .

Ujasníme si, které číslo ve výrazu představuje novou konstantu a který výraz představuje derivaci jmenovatele. Konstantu předsuneme před integrál.

K integraci už můžeme použít vzorec (9):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int \frac{3x^2}{1-3x^3} dx = \int \frac{3x^2}{1-3x^3} \cdot \frac{(-3)}{(-3)} dx = \int \left(\frac{1}{-3} \cdot \frac{(-9x^2)}{1-3x^3} \right) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{(-9x^2)}{1-3x^3} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{(1-3x^3)'}{1-3x^3} dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln |1-3x^3| + c$$

$$; x^3 \neq \frac{1}{3}$$

Pokud se ve výrazu integrované funkce nachází v čitateli mnohočlen o jeden stupeň nižšího řádu než ve jmenovateli, pak lze často k výpočtu použít vzorec (9):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

nebo lze daný výraz na použití výše uvedeného vzorce vhodnou úpravou převést.

Protože $(1-3x^3)' = -9x^2$ a v zadaném výrazu se v čitateli nachází výraz $3x^2$, rozšíříme čitatele i jmenovatel původního zlomku vhodnou konstantou (v našem případě jej vynásobíme konstantou (-3)). Touto úpravou do čitatele zlomku dostaneme výraz, který je roven derivaci jmenovatele a dále pak můžeme k výpočtu použít vzorec (9):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

Uvědomíme si, co v upraveném výrazu tvoří konstantu a která část výrazu reprezentuje vzorec (9); výraz vhodně zapíšeme. Konstantu předsuneme před integrál (pravidlo 1) a násobíme ji integrálem upravené funkce, která představuje vzorec (9). Integrál vypočteme.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 9:

Integrujte !

$$\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int 1 dx =$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{tg} x + x + c}}$$

Nelze-li při řešení integrálu ihned použít vzorců pro integraci základních funkcí, upravujeme daný výraz tak dlouho, až lze vzniklý výraz pomocí těchto základních vzorců integrovat. V našem případě nahradíme výraz ve jmenovateli zlomku výrazem $\cos^2 x$, protože platí vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (jednotková rovnice), tj. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Abychom mohli použít základní vzorce pro integrování, rozdělíme zlomek na dva zlomky, z nichž vznikl.

Integrál součtu funkcí je roven součtu integrálů jednotlivých funkcí (pravidlo 2).

Dále už lze integrovat pomocí základních vzorců pro integrování (6), (2).

$$\text{Podmínka : } (\cos x \neq 0) \Rightarrow x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int 1 dx = \underline{\underline{-\cot x - x + c}}$$

$$(\sin x \neq 0) \Rightarrow x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}; \text{ funkci upravíme}$$

nahrazením $\cot^2 x$ poměrem $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$; dále

postupuje obdobně jako v předchozím příkladě – vzorec (7). (2)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \underline{\underline{tgx - cot gx + c}}$$

$$(\sin x \neq 0 \wedge \cos x \neq 0) \Rightarrow x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\};$$

nejprve funkci upravíme $\Rightarrow$ nahradíme 1 v čitateli výrazem odpovídajícím jednotkové rovnici $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; následně rozdělíme vzniklý zlomek na dva (stejně jako v předcházejících řešených příkladech) a na základě tohoto rozdělení můžeme použít (pravidlo 2) a vzorců pro integraci základních funkcí (6), (7)

Příklad 10:

Integrujte !

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) dx = \int 1 dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x-1} dx = x + 2 \cdot \ln|x-1| + c \quad ; x \neq 1$$

Nachází-li se v čitateli zlomek mnohočlen stejného nebo vyššího řádu jako se nachází ve jmenovateli daného zlomku, pak postupujeme tak, že čitatele dělíme jmenovatelem tj.

$$(x+1) : (x-1) = 1 + \frac{2}{x-1}$$

a nahradíme původní zlomek tímto novým výrazem.

Nyní můžeme integrovat jednotlivé členy mnohočlenu (pravidlo 2) a použít k integraci metod a vzorců, o nichž jsme hovořili již v předchozích řešených příkladech – zejména pravidla 1 a vzorce (9).

Ukažme si **ještě druhou metodu řešení** tohoto příkladu !

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \frac{x+1-1+1}{x-1} dx = \int \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) dx = \int 1 dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= x + 2 \cdot \ln|x-1| + c \quad ; x \neq 1$$

Čitatele původního zlomku vhodně doplníme konstantami tak, abychom v čitateli získali výraz nacházející se ve jmenovateli zlomku $\pm$ „nějaká“ konstanta. Následně vzniklý zlomek rozložíme vhodně na dva zlomky. Pak můžeme k integraci použít mj. pravidel 1 a 2 a vzorce (9).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \frac{x}{x+6} dx = \int \frac{x+6-6}{x+6} dx = \int \left(\frac{x+6}{x+6} - \frac{6}{x+6} \right) dx = \int \left(1 - \frac{6}{x+6} \right) dx = \int 1 dx - 6 \int \frac{1}{x+6} dx =$$

$$= x - 6 \ln|x+6| + c$$

$x \neq -6$; k výpočtu integrálu použijeme druhou metodu řešení, jež jsme použili při výpočtu předcházejícího integrálu; čitatele vhodně doplníme konstantami; následně vzniklý zlomek rozložíme na dva a k další integraci použijeme pravidel 1 a 2 a vzorce (9)

$$\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x+3} dx = \int \left(x + \frac{1}{x+3} \right) dx = \int x dx + \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{2} x^2 + \ln|x+3| + c \quad ; x \neq -3$$

Nachází-li se v čitateli zlomek mnohočlen stejného nebo vyššího řádu jako se nachází ve jmenovateli daného zlomek, pak postupujeme tak, že čitatele dělíme jmenovatelem tj.

$$(x^2 + 3x + 1) : (x + 3) = x + \frac{1}{x+3}$$

a nahradíme původní zlomek tímto novým výrazem.

Nyní můžeme integrovat jednotlivé členy mnohočlenu (pravidlo 2) a použít k integraci metod a vzorců, o nichž jsme hovořili již v předcházejících řešených příkladech – zejména pravidla 1 a vzorce (9).

Příklad 11:

Určete rovnici křivky, která prochází bodem $A[2;3]$ a jejíž tečna v libovolném bodě má směrnici $x+1$!

Řešení:

1) směrnice tečny ... $k_t = x+1 \Rightarrow F'(x) = x+1 = f(x)$ tzn. známe výsledek první derivace hledané primitivní funkce

$$2) \int f(x) dx = F(x) + c \Rightarrow \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + c$$

3) Ze všech primitivních funkcí tvaru $F : y = \frac{x^2}{2} + x + c$ určíme tu z nich, jejíž graf prochází bodem $A[2;3] \Rightarrow$ Dosadíme souřadnice bodu $A[2;3]$ do nalezeného předpisu funkce F a vypočteme $c. \Rightarrow 3 = \frac{4}{2} + 2 + c \Rightarrow c = -1$

4) Hledaná funkce má předpis: $y = \frac{x^2}{2} + x - 1$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úlohy k procvičování:

Integrujete (podmínky ponecháváme na čtenáři) !

$$1) \int (x^3 - 5x^2 + 6x - 3) dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + c$$

$$2) \int (4x^3 - 6x^2 - 4x - 1) dx$$

$$\text{Výsledek: } x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + c$$

$$3) \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$\text{Výsledek: } \ln|x| + \frac{1}{2x^2} + c$$

$$4) \int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{x} + 9\sqrt[3]{x} + c$$

$$5) \int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + c$$

$$6) \int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x\sqrt{x}} dx$$

$$\text{Výsledek: } 4\sqrt[4]{x} + c$$

$$7) \int \sqrt{x\sqrt{x}} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{4}{7}x^4\sqrt{x^3} + c$$

$$8) \int \operatorname{tg} x dx$$

$$\text{Výsledek: } -\ln|\cos x| + c$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

9) $\int (3x^2 - 2x - 10) dx$

Výsledek: $x^3 - x^2 - 10x + c$

10) $\int \left(\frac{1}{x^3} - \sin x \right) dx$

Výsledek: $-\frac{1}{2x^2} + \cos x + c$

11) $\int (2 \sin x + 3 \cos x) dx$

Výsledek: $-2 \cos x + 3 \sin x + c$

12) $\int (2^x - 3^x) dx$

Výsledek: $\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{3^x}{\ln 3} + c$

13) $\int \left(\frac{3 - x^2}{x} \right)^2 dx$

Výsledek: $-\frac{9}{x} - 6x + \frac{x^3}{3} + c$

14) $\int \frac{18x^2 - 2}{3x - 1} dx$

Výsledek: $3x^2 + 2x + c$

15) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x + 1} dx$

Výsledek: $x + \cos x + c$

16) $\int \frac{\sin 2x}{2 \cos x} dx$

Výsledek: $-\cos x + c$

17) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

Výsledek: $-\cot x - 2x + c$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$18) \int \frac{\cos 2x}{1 - \sin^2 x} dx$$

Výsledek: $2x - \operatorname{tg} x + c$

$$19) \int \left(\frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx$$

Výsledek: $\frac{2}{5} x^2 \cdot \sqrt{x} - \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{x} + e^x + c$

$$20) \int (x - 2)^2 \cdot (x^2 + 1) dx$$

Výsledek: $\frac{1}{5} x^5 - x^4 + \frac{5}{3} x^3 - 2x^2 + 4x + c$

$$21) \int (3 \cdot 2^x - 5 \sin x + 1) dx$$

Výsledek: $\frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} + 5 \cos x + x + c$

$$22) \int \frac{5x}{3x^2 + 5} dx$$

Výsledek: $\frac{5}{6} \ln |3x^2 + 5| + c$

$$23) \int \cot g x dx$$

Výsledek: $\ln |\sin x| + c$

$$24) \int \frac{2}{3x - 1} dx$$

Výsledek: $\frac{2}{3} \ln |3x - 1| + c$

$$25) \int \frac{2x}{5 - x^2} dx$$

Výsledek: $-\ln |5 - x^2| + c$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$26) \int \frac{3x^2}{1-3x^3} dx$$

$$\text{Výsledek: } -\frac{1}{3} \ln|1-3x^3| + c$$

$$27) \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\text{Výsledek: } \sin x + \cos x + c$$

$$28) \int \sqrt{1-\cos^2 x} dx$$

$$\text{Výsledek: } -\cos x + c$$

$$29) \int \tan^2 x dx$$

$$\text{Výsledek: } \tan x - x + c$$

$$30) \int (2x + 2^x) dx$$

$$\text{Výsledek: } x^2 + \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

$$31) \int \frac{x+2}{x-1} dx$$

$$\text{Výsledek: } x + 3 \ln|x-1| + c$$

$$32) \int \frac{x}{x+1} dx$$

$$\text{Výsledek: } x - \ln|x+1| + c$$

$$33) \int \frac{x^2 - 3x}{4} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{x^3}{12} - \frac{3}{8} x^2 + c$$

$$34) \int \frac{2x^3 + x - 3}{x^2} dx$$

$$\text{Výsledek: } x^2 + \ln|x| + \frac{3}{x} + c$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$35) \int \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x - 1} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$36) \int \frac{5x}{x+11} dx$$

$$\text{Výsledek: } 5x - 55 \ln|x+11| + c$$

$$37) \int \frac{x^2 - 5x - 2}{x - 5} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{1}{2}x^2 - 2 \ln|x-5| + c$$

$$38) \int \frac{3x^2 + 12x + 4}{x + 4} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{3}{2}x^2 + 4 \ln|x+4| + c$$

39) Určete rovnici křivky, která prochází bodem $A[-4;5]$ a jejíž tečna v libovolném bodě má směrnici $2x + 4$!

$$\text{Výsledek: } f : y = x^2 + 4x + 5$$

40) K dané funkci $f : y = 3x^2 - 3x + 11$ určete primitivní funkci F tak, aby graf funkce F procházel bodem $A[2;3]$

$$\text{Výsledek: } f : y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 11x - 21$$

41) K dané funkci $f : y = 3 - \frac{2}{x}$ určete primitivní funkci F tak, aby graf funkce F procházel bodem $A[e;-2]$

$$\text{Výsledek: } f : y = 3x - 2 \ln|x| - 3e$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

INTEGRAČNÍ METODY

1) Substituční metoda integrace

Tato metoda se používá **při integrování složených funkcí** $f : y = f(z); z = g(x)$

$$\int f(z) dz = F(z) + c$$

Pro integrál složené funkce $f : y = f(z); z = g(x)$ pak platí:

$$\int f(z) dz = \int f[g(x)] g'(x) dx \quad \text{za předpokladu, že existuje derivace funkce } g'(x)$$

Postup řešení neurčitého integrálu substituční metodou nejlépe pochopíte na řešených příkladech. Volit vhodnou substituci není snadné a vyžaduje určitou zkušenost.

Řešené úlohy:

Příklad 1:

Integrujte !

$$\int (2x-5)^6 dx = \int t^6 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^6 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^7}{7} = \frac{(2x-5)^7}{14} + c$$

- zavedeme substituci: $t = 2x - 5$
- substituci derivujeme: $(t)' = (2x - 5)'$

$$dt = 2dx$$

- vyjádříme dx : $dx = \frac{dt}{2}$

- nové proměnné dosadíme do původního integrálu (viz šipky)

Následně integrál řešíme pomocí základních pravidel pro integrování – konstantu předsuneme před integrál (pravidlo 1) a $\int t^6 dt$ integrujeme jako mocninou funkci (vzorec 3). Na závěr za t dosadíme původní výraz.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2(x+1)^2} + c \quad ; x \neq -1$$

- zavedeme substituci: $t = x + 1$
- substituci derivujeme: $(t)' = (x+1)'$
 $dt = dx$
- vyjádříme dx : $dx = dt$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Následně integrand upravíme tak, abychom mohli použít integrační pravidla – odstraníme zlomek převedením výrazu ve jmenovateli zlomku do jeho čitatele a dále integrál řešíme užitím vzorce (3). Výsledek nejprve upravíme a na závěr dosadíme za proměnnou t zpět původní výraz.

$$\int \sqrt{2x-1} dx = \int \sqrt{t} \frac{dt}{2} = \int t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)^3} + c \quad ; x \geq \frac{1}{2}$$

- zavedeme substituci: $t = 2x - 1$
- substituci derivujeme: $(t)' = (2x-1)'$
 $dt = 2dx$
- vyjádříme dx : $dx = \frac{dt}{2}$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Následně integrand upravíme převedením odmocniny na mocninu a dále integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (3). Výsledek upravíme a na závěr dosadíme za proměnnou t zpět původní výraz.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{(-2)} = \int t^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{(-2)} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{3-2x} + c \quad ; x < \frac{3}{2}$$

- zavedeme substituci: $t = 3 - 2x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (3-2x)'$
 $dt = -2dx$
- vyjádříme dx : $dx = \frac{dt}{-2}$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Následně integrand upravíme tak, že převedeme odmocninu na mocninu a dále integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (3). Výsledek upravíme a na závěr dosadíme za proměnnou t zpět původní výraz.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \frac{x}{2} \sqrt{3-2x^2} dx = \int \frac{\sqrt{3-2x^2}}{2} \cdot x dx = \int \frac{\sqrt{t}}{2} \cdot \frac{dt}{(-4)} = -\frac{1}{8} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{8} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{8} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} = -\frac{1}{12} \sqrt{(3-2x^2)^3} + c$$

$$; 3-2x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

- zavedeme substituci: $t = 3-2x^2$
- substituci derivujeme: $(t)' = (3-2x^2)'$
 $dt = -4x dx$
- vyjádříme $x dx$: $x dx = \frac{dt}{-4}$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Integrovanou funkci vhodně upravíme, následně zavedeme substituci a po zpětném dosazení substituce do původního integrálu vzniklou funkci upravíme. Převědeme odmocninu na mocninu a integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (3). Výsledek opět zjednodušíme a na závěr dosadíme za proměnnou t zpět původní výraz s původní neznámou x .

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x dx = \int \frac{1}{t} \cdot (-dt) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x| + c$$

$$(\cos x \neq 0) \Rightarrow x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

- zavedeme substituci: $t = \cos x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (\cos x)'$
 $dt = -\sin x dx$
- vyjádříme $\sin x dx$: $\sin x dx = -dt$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Integrovanou funkci upravíme, zavedeme vhodnou substituci a po zpětném dosazení substituce do původního integrálu vzniklou funkci upravíme. Integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (8). Výsledek zjednodušíme a na závěr dosadíme za proměnnou t původní výraz s původní neznámou x .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \sin x \cos^3 x dx = \int \cos^3 x \cdot \sin x dx = \int t^3 \cdot (-dt) = -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} = -\frac{\cos^4 x}{4} + c$$

- zavedeme substituci: $t = \cos x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (\cos x)'$
 $dt = -\sin x dx$
- vyjádříme $\sin x dx$: $\sin x dx = -dt$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Integrovanou funkci upravíme, zavedeme substituci a po zpětném dosazení substitute do původního integrálu vzniklý integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (3). Na závěr dosadíme za proměnnou t původní výraz s původní neznámou x .

$$\int \cos(1-2x) dx = \int \cos t \cdot \frac{dt}{(-2)} = -\frac{1}{2} \int \cos t dt = -\frac{1}{2} \sin t = -\frac{1}{2} \sin(1-2x) + c$$

- zavedeme substituci: $t = 1 - 2x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (1 - 2x)'$
 $dt = -2dx$
- vyjádříme dx : $dx = \frac{dt}{-2}$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Integrovanou funkci upravíme zavedením substitute a po zpětném dosazení nové proměnné do původního integrálu vzniklý integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (5). Na závěr dosadíme za proměnnou t původní výraz s původní neznámou x .

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + c \quad ; x > 0$$

- zavedeme substituci: $t = \ln x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (\ln x)'$
 $dt = \frac{1}{x} dx$
- vyjádříme $\frac{1}{x} dx$: $dt = \frac{1}{x} dx$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Integrovanou funkci upravíme, zavedeme substituci, provedeme náhradu původních výrazů novými (získanými substitucí) a vzniklý integrál řešíme užitím vzorce (3). Na závěr dosadíme za proměnnou t původní výraz s původní neznámou x .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx = \int \ln^4 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} = \frac{\ln^5 x}{5} + c \quad ; x > 0$$

- zavedeme substituci: $t = \ln x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (\ln x)'$
 $dt = \frac{1}{x} dx$
- vyjádříme $\frac{1}{x} dx$: $dt = \frac{1}{x} dx$

- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Integrovanou funkci upravíme, zavedeme substituci, provedeme náhradu původních výrazů novými (získanými substitucí) a vzniklý integrál řešíme užitím vzorce (3). Na závěr dosadíme za proměnnou t původní výraz s původní neznámou x .

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} \cdot x^3 dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{t^2} = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(x^4 + 1)^2} + c$$

- zavedeme substituci: $t = x^4 + 1$
- substituci derivujeme: $(t)' = (x^4 + 1)'$
 $dt = 4x^3 dx$
- vyjádříme $x^3 dx$: $x^3 dx = \frac{dt}{4}$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Integrovanou funkci vhodně upravíme, zavedeme substituci a po zpětném dosazení substituce do původního integrálu vzniklou funkci upravíme. Převědeme odmocninu na mocninu a odstraníme zlomek. Integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (3). Výsledek opět zjednodušíme a na závěr dosadíme za proměnnou t zpět původní výraz s původní neznámou x .

$$\int e^{2-3x} dx = \int e^t \cdot \frac{dt}{(-3)} = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t = -\frac{1}{3} e^{2-3x} + c$$

- zavedeme substituci: $t = 2 - 3x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (2 - 3x)'$
 $dt = -3dx$
- vyjádříme dx : $dx = \frac{dt}{-3}$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Zavedeme substituci a po zpětném dosazení substituce do původního integrálu, vzniklý integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (10). Na závěr dosadíme za proměnnou t původní výraz s původní neznámou x .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \operatorname{tg} 2x dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = \int \frac{1}{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{(-2)} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2} \ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + c$$

$$(\cos 2x \neq 0) \Rightarrow x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}$$

- zavedeme substituci: $t = \cos 2x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (\cos 2x)'$
 $dt = (-\sin 2x) \cdot 2dx$
- vyjádříme $\sin 2x dx$: $\sin 2x dx = \frac{dt}{-2}$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu

Integrovanou funkci vhodně upravíme, zavedeme substituci a po zpětném dosazení substituce do původního integrálu vzniknou funkce opět upravíme. Takto vzniklý integrál řešíme užitím pravidla 1 a vzorce (8). Na závěr dosadíme za proměnnou t původní výraz s původní neznámou x .

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos t \cdot \frac{dt}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin t = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \end{aligned}$$

- nejprve nahradíme $\sin^2 x$ užitím vzorce pro výpočet $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- konstantu předsuneme před integrál a integrujeme člen po členu
- druhý integrál řešíme užitím substituční metody integrace
- zavedeme substituci: $t = 2x$
- substituci derivujeme: $(t)' = (2x)'$
 $dt = 2dx$
- vyjádříme dx : $dx = \frac{dt}{2}$
- nové proměnné dosadíme do původního integrálu a integrál vypočteme

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úlohy k procvičování:

Integrujete (podmínky ponecháváme na čtenáři) !

1) $\int (1-3x)^7 dx$

Výsledek: $-\frac{(1-3x)^8}{24} + c$

2) $\int (2x-3)^3 dx$

Výsledek: $\frac{(2x-3)^4}{8} + c$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$

Výsledek: $\sqrt{2x+3} + c$

4) $\int \cos 3x dx$

Výsledek: $\frac{1}{3} \sin 3x + c$

5) $\int \cos \frac{2x-3}{5} dx$

Výsledek: $\frac{5}{2} \sin \frac{2x-3}{5} + c$

6) $\int \cot g \frac{2x}{3} dx$

Výsledek: $\frac{3}{2} \ln \left| \sin \frac{2}{3} x \right| + c$

7) $\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}} dx$

Výsledek: $\sqrt{x^3+2} + c$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

8) $\int \sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x} dx$

Výsledek: $\frac{2}{3} \sqrt{(1 - \cos x)^3} + c$

9) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

Výsledek: $3 \sqrt[3]{\sin x} + c$

10) $\int \sqrt{e^x} dx$

Výsledek: $2 \sqrt{e^x} + c$

11) $\int a^x e^x dx$

Výsledek: $\frac{a^x e^x}{\ln a + 1} + c$

12) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

Výsledek: $\frac{1}{2} \sin 2x + c$

13) $\int x^2 \sin \frac{x^3}{3} dx$

Výsledek: $-\cos \frac{x^3}{3} + c$

14) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

Výsledek: $\frac{2}{3} \sqrt{\tan^3 x} + c$

15) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$

Výsledek: $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$16) \int 10x(x^2 + 13)^{12} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{5}{13}(x^2 + 13)^{13} + c$$

$$17) \int 3x \sqrt[4]{x^2 + 1} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{6}{5} \sqrt[4]{(x^2 + 1)^5} + c$$

$$18) \int \frac{5}{(2x - 3)^4} dx$$

$$\text{Výsledek: } -\frac{5}{6(2x - 3)^3} + c$$

$$19) \int \frac{5x}{3x^2 + 1} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{5}{6} \ln|3x^2 + 1| + c$$

$$20) \int \sin 7x dx$$

$$\text{Výsledek: } -\frac{1}{7} \cos 7x + c$$

$$21) \int \frac{3 \ln x}{x} dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{3}{2} \ln^2|x| + c$$

$$22) \int \sin^3 x dx$$

$$\text{Výsledek: } \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + c$$

$$23) \int \cos^5 x dx$$

$$\text{Výsledek: } \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

24) $\int 3e^{-x} dx$

Výsledek: $-3e^{-x} + c$

25) $\int \sin x \cos x dx$

Výsledek: $\frac{\sin^2 x}{2} + c$

2) Integrace metodou per partes (Integrace „po částech“)

Je metoda, při které danou funkci integrujeme postupně, tedy po částech. **Používá se při integraci součinu dvou funkcí.** Jsou-li dány dvě funkce $u(x)$ a $v(x)$, které mají vlastní derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, pak pro derivaci součinu těchto funkcí platí:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

nebo psáno stručněji:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Následně:

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

Rovnici integrujeme (levou i pravou stranu) za předpokladu, že uvedené integrály existují:

$$\int u' \cdot v \, dx = \int [(u \cdot v)' - u \cdot v'] \, dx$$

$$\int u' \cdot v \, dx = \int (u \cdot v)' \, dx - \int u \cdot v' \, dx$$

$$\boxed{\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx}$$

V rámečku je uveden vzorec pro integraci metodou per partes

Řešené úlohy:

Příklad 1:

Integrujte !

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} \text{volíme : } u' = \cos x \\ \text{vypočteme : } u = \int \cos x \, dx = \sin x \end{array} \right] \begin{array}{l} v = x \\ v' = 1 \end{array} = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = \underline{\underline{x \cdot \sin x + \cos x + c}}$$

- volíme u' a v (metoda per partes **vyžaduje znalosti derivací funkcí** pro správnou počáteční volbu funkcí u' a v)
- vypočteme u a v'
- ve směru šipek použijeme vzorec metody per partes (stejně tak postupujeme v následujících řešených příkladech)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int x^2 \cdot \sin x dx = \left[\begin{array}{l} \text{volíme : } u' = \sin x \\ \text{vypočteme : } u = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v = x^2 \\ v' = 2x \end{array} \right] = -x^2 \cdot \cos x - \int (-2x \cos x) dx =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \left[\begin{array}{l} \text{viz} \quad u' = \cos x \\ \text{předchozí} \\ \text{příklad: } u = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v = x \\ v' = 1 \end{array} \right] =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = -x^2 \cdot \cos x + 2(x \sin x + \cos x) = \underline{\underline{-x^2 \cdot \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c}}$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \left[\begin{array}{l} \text{volíme : } u' = e^x \\ \text{vypočteme : } u = \int e^x dx = e^x \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v = x^2 \\ v' = 2x \end{array} \right] = x^2 \cdot e^x - \int 2x e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2 \cdot \left[\begin{array}{l} \text{volíme : } u' = e^x \\ \text{vypočteme : } u = \int e^x dx = e^x \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v = x \\ v' = 1 \end{array} \right] =$$

$$= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = \underline{\underline{x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\int \ln x dx = \left[\begin{array}{l} \text{volíme : } u' = 1 \\ \text{vypočteme : } u = \int 1 dx = x \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v = \ln x \\ v' = \frac{1}{x} \end{array} \right] = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = \underline{\underline{x \ln x - x + c}}$$

; $x > 0$

Úlohy k procvičování:

Integrujete (podmínky ponecháváme na čtenáři) !

1) $\int x e^x dx$

Výsledek: $x e^x - e^x + c$

2) $\int x \cdot \sin x dx$

Výsledek: $-x \cos x + \sin x + c$

3) $\int x^2 \cos x dx$

Výsledek: $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$

4) $\int (x+1) e^x dx$

Výsledek: $x e^x + c$

5) $\int x \cdot \ln x dx$

Výsledek: $\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$

6) $\int x^3 \ln x dx$

Výsledek: $\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + c$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

7) $\int x e^{2x} dx$

Výsledek: $\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + c$

8) $\int x \ln^2 x dx$

Výsledek: $\frac{x^2}{2}(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + c$

9) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Výsledek: $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c$

10) $\int e^x \sin x dx$

Výsledek: $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$