

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

|                                           |                |                         |                       |
|-------------------------------------------|----------------|-------------------------|-----------------------|
| <i>Předmět:</i>                           | <i>Ročník:</i> | <i>Vytvořil:</i>        | <i>Datum:</i>         |
| <b>MATEMATIKA</b>                         | <b>ČTVRTÝ</b>  | <b>Mgr. Tomáš MAŇÁK</b> | <b>25. srpna 2012</b> |
| <i>Název zpracovaného celku:</i>          |                |                         |                       |
| <b>GEOMETRICKÝ VÝZNAM DERIVACE FUNKCE</b> |                |                         |                       |

**GEOMETRICKÝ VÝZNAM DERIVACE FUNKCE v bodě  $x_0$**   
**(tečny grafu funkcí)**

Je dána funkce  $f: y = f(x)$

První derivace funkce  $f'(x_0) = y'(x_0)$  funkce  $f$  v bodě  $x_0$  udává hodnotu směrnice tečny grafu funkce  $f: y = f(x)$  v jejím bodě  $T[x_0; y_0 = f(x_0)]$ .

Tato tečna má pak v bodě  $x_0$  rovnici:  $t: y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

**SHRNUTO !!!**

$$f: y = f(x)$$

$k_t = f'(x_0)$  ..... **směrnice tečny** grafu funkce  $y = f(x)$  v jejím bodě  $x_0$ .

$T[x_0; y_0 = f(x_0)]$  ..... **dotykový bod** tečny a grafu funkce  $y = f(x)$ .

$t: y - y_0 = k_t \cdot (x - x_0)$  ..... **rovnice tečny grafu funkce**  $y = f(x)$  **v bodě**  $x_0$ .

$t: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  ..... lze zapsat i takto

**Poznámka:**

Pomocí první derivace lze také napsat rovnici normály grafu funkce  $f: y = f(x)$  v jejím bodě  $x_0$ ,

Platí:  $k_n$  ..... **směrnice normály** grafu funkce  $y = f(x)$  v jejím bodě  $x_0$ , přičemž platí, že

$k_t \cdot k_n = -1$  ..... vzájemný vztah mezi směrnicí tečny a směrnicí normály v bodě  $x_0$ .

$n: y - y_0 = k_n \cdot (x - x_0)$  ..... **rovnice normály grafu funkce**  $y = f(x)$  **v bodě**  $x_0$ .

Tečna i normála procházejí tímž bodem  $x_0$  tj.  $T[x_0; y_0 = f(x_0)]$  a jsou na sebe kolmé.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Řešené příklady:

#### Příklad 1

Napište rovnici tečny grafu funkce  $f: y = \frac{x^2}{x-1}$  v jejím bodě  $T[-3; ?]$ .

#### Řešení:

- 1) Dopočteme druhou souřadnici dotykového bodu  $T$ , dosazením zadané  $x$ -ové souřadnice do funkčního předpisu.

$$y = \frac{(-3)^2}{-3-1} = -\frac{9}{4} = y_0 = f(x_0) \Rightarrow T[x_0; y_0] = \left[-3; -\frac{9}{4}\right]$$

- 2) Vypočteme první derivaci funkce (obecně; v tomto případě použijeme vzorec pro derivaci podílu dvou funkcí).

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

- 3) Vypočteme hodnotu derivace funkce v bodě  $x_0 = -3$  dosazením této číselné hodnoty do obecného výsledku derivace funkce (viz 2), čímž získáme hodnotu směrnice tečny grafu funkce  $f(x)$  v jejím bodě  $T$ .

$$y'(-3) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{(-3)^2 - 2 \cdot (-3)}{(-3-1)^2} = \frac{9+6}{(-4)^2} = \frac{15}{16} = k_t$$

- 4) Napíšeme rovnici tečny grafu funkce  $f: y = \frac{x^2}{x-1}$  v jejím bodě  $T[x_0; y_0] = \left[-3; -\frac{9}{4}\right]$ , dosazením vypočtených hodnot do předpisu rovnice tečny.

$$t: y - y_0 = k_t \cdot (x - x_0)$$

$$t: y - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{15}{16} \cdot (x - (-3)) \quad \text{rovnici upravíme a převedeme do obecného tvaru rovnice}$$

$$t: y + \frac{9}{4} = \frac{15}{16} \cdot (x + 3) \quad \text{přímky} \quad / \cdot 16$$

$$t: 16y + 36 = 15x + 45$$

$$t: \underline{\underline{15x - 16y + 9 = 0}}$$

**rovnice tečny grafu dané funkce v daném bodě**

## Příklad 2

Napište rovnici tečny ke grafu funkce  $f: y = 2x^2 + 3x + 1$  v bodě  $T[1; y_T]$ .

Řešení:

- 1) Vypočteme druhou souřadnici dotykového bodu  $T$ , dosazením zadané  $x$ -ové souřadnice do funkčního předpisu.

$$y_T = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2 + 3 + 1 = 6 = y_0 = f(x_0) \Rightarrow T[x_0; y_0] = [1; 6]$$

- 2) Vypočteme první derivaci funkce (obecně).

$$y' = (2x^2 + 3x + 1)' = 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0 = 4x + 3$$

- 3) Vypočteme hodnotu derivace funkce v bodě  $x_0 = 1$  dosazením této číselné hodnoty do obecného výsledku derivace funkce (viz 2), čímž získáme hodnotu směrnice tečny grafu funkce  $f(x)$  v jejím bodě  $T$ .

$$y'(1) = 4x + 3 = 4 \cdot 1 + 3 = 4 + 3 = 7 = k_t$$

- 4) Napíšeme rovnici tečny grafu funkce  $f: y = 2x^2 + 3x + 1$  v jejím bodě  $T[x_0; y_0] = [1; 6]$ , dosazením vypočtených hodnot do předpisu rovnice tečny.

$$t: y - y_0 = k_t \cdot (x - x_0)$$

$$t: y - 6 = 7 \cdot (x - 1)$$

rovnici upravíme a převedeme do obecného tvaru rovnice přímky

$$t: y - 6 = 7x - 7$$

$$t: \underline{\underline{7x - y - 1 = 0}}$$

**rovnice tečny grafu dané funkce v daném bodě**

## Příklad 3

Ve kterém bodě grafu funkce  $f: y = x^2 - 4x + 5$  má tečna směrnici  $k = -2$ .

Řešení:

- 1) Předpokládáme, že toto splňuje bod  $T[x_0; y_0]$ . Tzn., že výsledkem derivace funkce je číslo  $(-2)$  tj.  $f'(x_0) = k_t = -2$ . Proto vypočteme nejprve první derivaci funkce obecně

$$y' = (x^2 - 4x + 5)' = 2x - 4 \cdot 1 + 0 = 2x - 4$$

- 2) Výsledek první derivace položíme roven  $(-2) = k_t$ .

$$y'(x_0) = 2x_0 - 4 = -2 = k_t$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 3) Získanou lineární rovnici vyřešíme.

$$y'(x_0) = 2x_0 - 4 = -2 = k_t$$

$$2x_0 - 4 = -2$$

$$2x_0 = 2$$

$$x_0 = 1 \dots\dots\dots x\text{-ová souřadnice dotykového bodu } T[x_0; y_0]$$

- 4) Dopočítáme  $y$ -ovou souřadnici dotykového bodu  $T[x_0; y_0]$ , dosazením vypočtené hodnoty

$$x_0 = 1 \text{ do funkčního předpisu dané funkce } f: y = x^2 - 4x + 5.$$

$$y_0 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$$

- 5) Zapišeme výsledek.

$$\underline{T[x_0; y_0] = [1; 2]}$$

### **Příklad 4**

Napište rovnici tečny grafu funkce  $f: y = \frac{x}{x+1}$ , která s osou  $x$  svírá úhel  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Řešení:

- 1) Z učiva o lineárních funkcích, které jsme probírali v 1. ročníku, víme, že směrnice přímky je rovna funkci tangens směrového úhlu přímky tj.  $k = \operatorname{tg} \alpha$ . Z toho plyne, že pro směrnici tečny bude platit též vztah, tedy  $k_t = \operatorname{tg} \alpha$ . Připomínáme, že směrovým úhlem rozumíme úhel, který přímka svírá s kladným směrem osy  $x$ , tj. zadaný úhel  $\alpha$ .

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

$$k_t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

- 2) Na základě nově získaných znalostí víme, že směrnici tečny vypočteme také pomocí první derivace funkce (obecně; pomocí vzorce pro derivaci podílu dvou funkcí).

$$\begin{aligned} k_t = y' &= \left( \frac{x}{x+1} \right)' = \frac{(x)' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 3) Z kroku 1) a 2) vyplývá, že směrnice tečny vypočtena v kroku 1 se musí rovnat směrnici tečny vypočtené v kroku 2.

$$1 = \frac{1}{(x+1)^2}$$

odstraníme zlomek

$$(x+1)^2 = 1$$

levou stranu umocníme podle vzorce  $(a+b)^2$

$$x^2 + 2x + 1 = 1$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = -2$$

vypočtené kořeny rovnice (x-ové souřadnice dotykových bodů tečen); tečny budou dvě

- 4) Dopočítáme y-ové souřadnice dotykových bodů jednotlivých tečen dosazením vypočtených x-ových souřadnic z kroku 3 do funkčního předpisu dané funkce  $f$ .

$$x_1 = 0$$

$\vee$

$$x_2 = -2$$

$$y_1 = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$y_2 = \frac{-2}{-2+1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$T_1[x_1; y_1] = [0; 0]$$

$$T_2[x_2; y_2] = [-2; 2]$$

dotykové body

- 5) Napíšeme rovnice obou tečen grafu funkce  $f: y = \frac{x}{x+1}$ , které s osou x svírají požadovaný

úhel  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  dosazením získaných hodnot do předpisu rovnice tečny.

$$T_1[0; 0]$$

$$t_1: y - y_0 = k_t \cdot (x - x_0)$$

$$t_1: y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$$

rovnici upravíme a převedeme do obecného tvaru rovnice přímky

$$t_1: y = x$$

$$\underline{\underline{t_1: x - y = 0}}$$

**rovnice první tečny grafu dané funkce**

$$T_2[-2; 2]$$

$$t_2: y - y_0 = k_t \cdot (x - x_0)$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$t_2: y - 2 = 1 \cdot (x - (-2))$$

rovnici upravíme a převedeme do obecného tvaru rovnice přímky

$$t_2: y - 2 = x + 2$$

$$\underline{t_2: x - y + 4 = 0}$$

**rovnice druhé tečny grafu dané funkce**

### Úlohy k procvičování

1) Napište rovnici tečny ke grafu funkce  $f$  v jejím bodě  $T[x_0; y_0]$ , jestliže platí:

a)  $f(x) = x^2 - x + 1; T[-2; ?]$

b)  $f(x) = x^3; T[0; ?]$

c)  $f(x) = x^4 + x^3; T[1; ?]$

d)  $f(x) = 3x^5 - 5x^3; T[1; ?]$

e)  $f(x) = x^2 - x + 1; T[-2; ?]$

f)  $f(x) = x^3; T[1; ?]$

g)  $f(x) = \frac{1}{x^2}; T[1; ?]$

h)  $f(x) = x^4; T[-2; ?]$

i)  $f(x) = -x^2 + 4x - 1; T[-2; ?]$

Výsledky:

- a)  $5x + y + 3 = 0$
- b)  $y = 0$
- c)  $7x - y - 5 = 0$
- d)  $y + 2 = 0$

2) Napište rovnici tečny grafu funkce  $f: y = \sin 2x$  v bodě  $T\left[\frac{3}{4}\pi; y_0\right]$ .

Výsledek:  $y + 1 = 0$

3) Napište rovnici tečny ke křivce  $f: y = \frac{2x^2 - 1}{3x + 2}$  v jejím bodě  $T[0; y_0]$ .

Výsledek:  $3x - 4y - 2 = 0$

4) K parabole  $f: y = x^2 - 2x + 3$  veďte tečnu, která s osou  $x$  svírá úhel  $\alpha = 135^\circ$ . Napište její rovnici a určete souřadnice dotykového bodu.

Výsledek:  $4x + 4y - 11 = 0$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5) Napište rovnici tečny grafu funkce  $f: y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$  v bodě  $T[-4; ?]$ .

Výsledek:  $A[-1/2; -2]$

6) Napište rovnice tečen ke křivce  $f: y = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 10x + 6$ , jsou-li tečny rovnoběžné s přímkou  $4x - 2y + 3 = 0$ .

Výsledek:  $4x - 2y - 51 = 0, 54x - 27y + 410 = 0$

7) Ve kterých bodech má graf funkce tečny rovnoběžné s osou  $x$ , je-li  $f: y = \frac{1}{3}x^3 - x$ .

Výsledek:  $A[1; -2/3], B[-1; 2/3]$

8) Napište rovnici tečny grafu funkce  $f: y = \frac{3x - 1}{2x + 3}$  v bodě  $T[0; y_0]$ .

Výsledek:  $11x - 9y - 3 = 0$

9) Napište rovnici tečny grafu funkce  $f: y = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$  v bodě  $T\left[-\frac{1}{2}; ?\right]$ .

Výsledek:  $2x + y + 2 = 0$

10) Napište rovnici tečny grafu funkce  $f: y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$  v bodě  $T[1; ?]$ .

Výsledek:  $2x - 9y + 1 = 0$

11) Určete rovnice tečen ke křivce  $f: y = x^3 + x^2 - 2x$  v průsečících křivky s osou  $x$ .

Výsledek:  $6x - y + 12 = 0, 2x + y = 0, 3x - y - 3 = 0$

12) Ve kterém bodě má parabola  $f: y = 2x^2 + 3x - 1$  tečnu:

- a) se směrovým úhlem  $\alpha = 45^\circ$ ,
- b) rovnoběžnou s přímkou  $5x - y + 3 = 0$ ?

Výsledek: a)  $A[-1/2; -2]$   
b)  $B[1/2; 1]$

13) Je dána parabola  $f: y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

- a) Určete rovnici tečny paraboly v bodě  $T[-2; ?]$ ,



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) Ve kterém bodě má parabola tečnu rovnoběžnou s přímkou  $5x - y - 2 = 0$ ?

Výsledek: a)  $x - y - 1 = 0$   
b)  $B[1/2; 1]$

14) Napište rovnici tečny grafu funkce  $f: y = 2x - \ln x$  v bodě  $T[1; ?]$ .

Výsledek:  $x - y + 1 = 0$

Použitá literatura:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

M. Dostálová, D. Pešatová: Matematika 7. část - učební materiály SPŠ Ostrava – Vítkovice

D. Hrubý, J. Kubát: Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet, Prometheus 1997

I. Dušek: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN 1988