

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

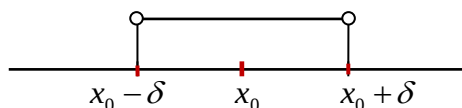
<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	ČTVRTÝ	VĚRA JÜTTNEROVÁ	27. 10. 2013
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
DERIVACE ZÁKLADNÍ A SLOŽENÉ FUNKCE			

DIFERENCIÁLNÍ POČET

LIMITA FUNKCE V BODĚ

Definice:

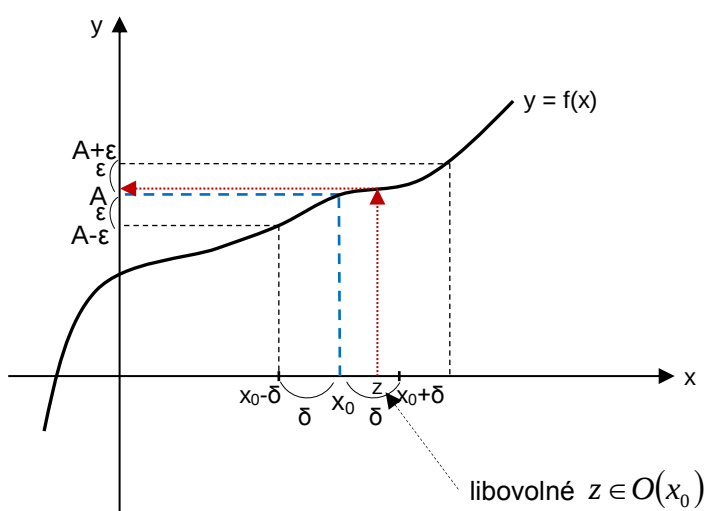
Okolí $O(x_0)$ bodu x_0 je libovolný interval $O(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$; $\delta > 0$ je libovolné kladné reálné číslo nazývané poloměr okolí $O(x_0)$.



Definice:

Nechť $f(x)$ je funkce, která je definována na nějakém okolí bodu x_0 , popřípadě kromě bodu x_0 . Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **limitu** A , jestliže k libovolnému ε okolí limity A existuje δ okolí bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$; $x \neq x_0$ platí, že $f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ nebo-li je splněna podmínka $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$(x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow A) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \right)$$



Zápis: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VĚTY O LIMITÁCH

- 1) Každá funkce má v daném bodě **nejvýše jednu** limitu.
- 2) Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Pak platí:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) &= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot A; \text{ } c \text{ je reálná konstanta} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0, B \neq 0 \end{aligned}$$

Řešený příklad 1:

Vypočítejte limitu funkce f v daném bodě x_0

- a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 5$; $x_0 = 2$
- b) $f(x) = x^3 - 2x + 3$; $x_0 = 1$

Řešení:

$$\text{a) } f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 5 \text{ } x_0 = 2;$$

Daná funkce je v bodě $x_0 = 2$ definovaná $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x^2 + 6x - 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 6x - \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 5 = -1$$

$$\text{b) } f(x) = x^3 - 2x + 3; \text{ } x_0 = 1$$

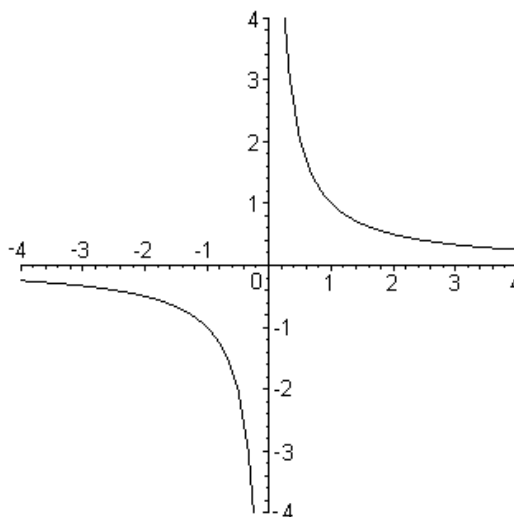
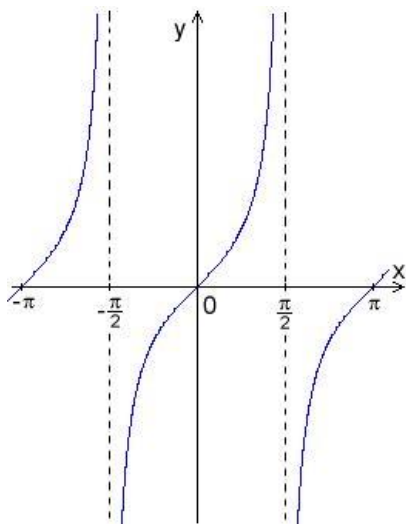
Daná funkce je v bodě $x_0 = 1$ definovaná $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

A) Příklady **nespojitéch** funkcí:

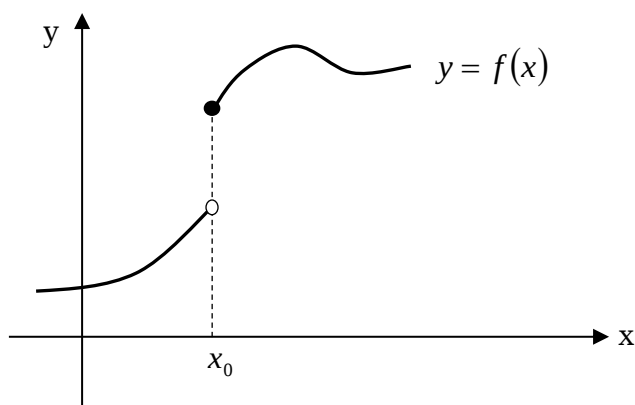


Zdroje obr: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Tangens>

http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Funci%C3%B3n_inversa.png

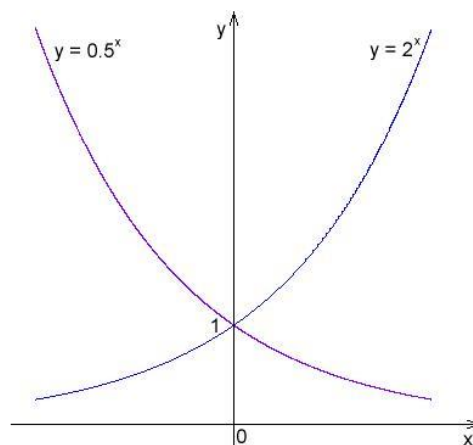
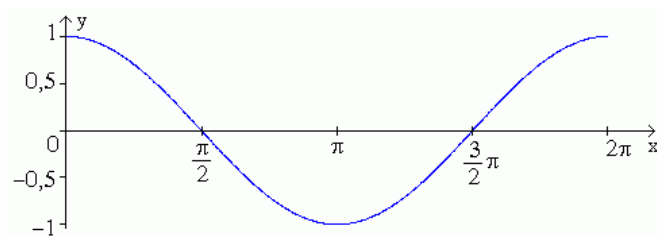
Grafy nespojitých funkcí nejsou celistvé křivky, ale jsou „přetrhnuté“.

Příklad nespojité funkce, která je v kritickém bodě x_0 definována, ale je nespojitá:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

B) Příklady **spojitých** funkcí:



Zdroje obr: <http://studentigih.tweb.sk/zemianek/kosinus.html>

<http://garaz.autorevue.cz/viewtopic.php?f=819&t=1073058>

Věta:

Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ **pro** $\forall x \in D(f); x_0 \in D(f)$, **pak je funkce** $f(x)$ **spojitá** **v bodě** x_0 .

VÝPOČET LIMITY NESPOJITÉ FUNKCE

Řešený příklad 2:

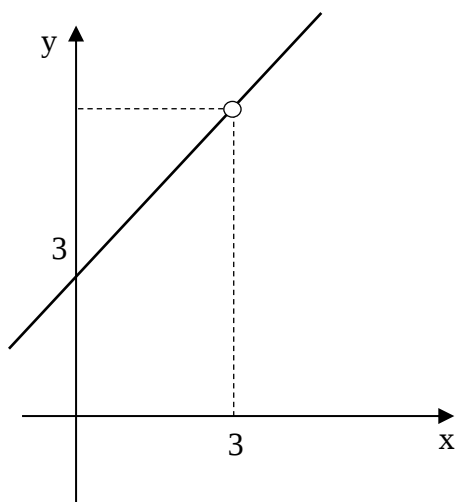
Vypočtěte limitu funkce:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Daná funkce není definovaná pro $x_0 = 3 \Rightarrow$ je v tomto bodě nespojitá.
Sestrojíme graf dané funkce a funkce jí „podobné“.

$$f: y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

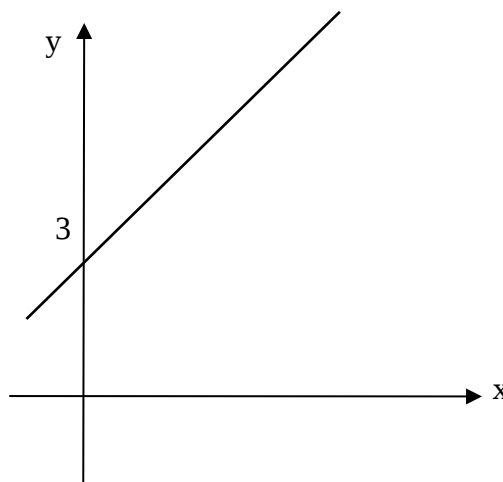
$$D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$$



x	-1	0	1	2	4	5
y	2	3	4	5	7	8

$$g: y = x + 3$$

$$D(g) = \mathbb{R}$$



x	-1	0	1	2	4	5
y	2	3	4	5	7	8

Závěr:

Obě funkce mají s výjimkou $x_0 = 3$ ve všech ostatních bodech shodné funkční hodnoty. V okolí bodu $x_0 = 3$ můžeme funkci $f(x)$ nahradit funkcí $g(x)$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Platí:

Je-li pro funkci $f(x)$ a $g(x)$ splněna podmínka $f(x) = g(x) \quad \forall x \neq x_0$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Potom můžeme psát:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST A - LIMITY

Příklad 1:

Vypočtěte limitu funkce f v daném bodě x_0

a) $f(x) = x^2 + x - 2; x_0 = 3$

b) $f(x) = x^4 + 1; x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}; x_0 = \frac{\pi}{4}$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + x; x_0 = 1$

Příklad 2:

Vypočtěte limity následujících funkcí:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{2 \cdot (x^2 - 1)}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{8x + 16}$

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$

7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x - \sin 2x}{\cos^2 x}$

8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 - \sin x}$

9) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x + 2 \sin x}{\sin^2 x}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

11) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{3x^2 - 3}$

12) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 7x - 44}{x^2 - 6x + 8}$

13) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

14) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x}$

15) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4}$

17) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos 2x}$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$

19) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4}$

20) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$22) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x+2}$$

Řešený příklad 3:

Pomocí vztahů $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ vypočítejte limity funkcí:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sin 4x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{2}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (x - \sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x} =$$

$$= \cos 0 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} 1 \right) = \cos 0 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot (1 - 1) = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos 0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST B – LIMITY

Vypočtete limity funkcí:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin 7x}{2x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + x}{2x}$

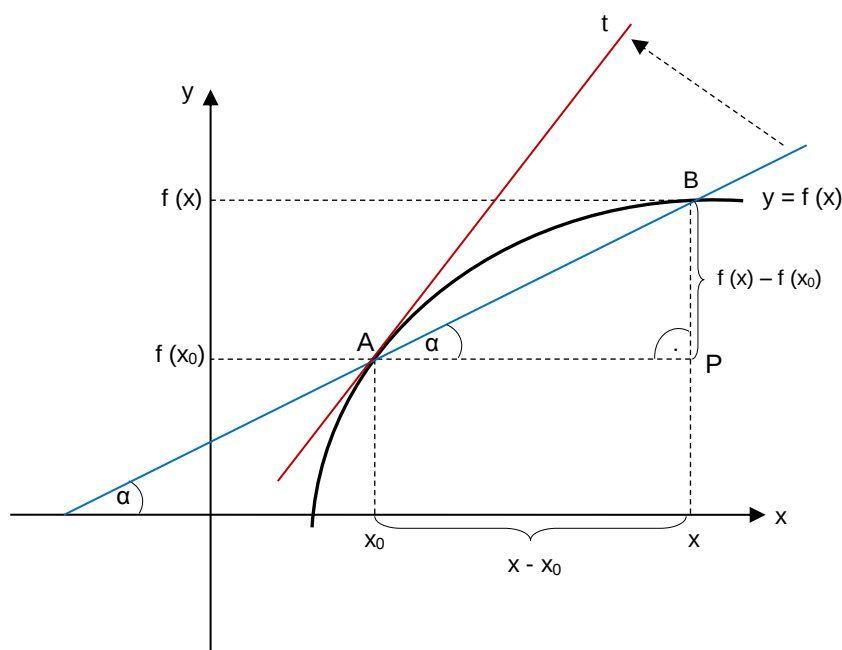
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x \cdot \sin x}{x^2}$

DERIVACE FUNKCE V BODĚ

Řešený příklad 4:

Vyjádřete směrnici tečny funkce $y = f(x)$ v jejím bodě $A = [x_0; f(x_0)]$.

Řešení (viz obr.)



Bod B má souřadnice: $B = [x; f(x)]$

Z $\triangle APB$ vyjádříme směrnici sečny AB :

$$k_{AB} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Jestliže bod $B \rightarrow A$, pak $x \rightarrow x_0 \Rightarrow$ směrnici sečny AB můžeme nahradit směrnici tečny funkce

$$\Rightarrow k_{AB} \rightarrow k_t$$

Pro **směrnici tečny** funkce $y = f(x)$ pak platí: $k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Definice:

Říkáme, že funkce f má derivaci v bodě x_0 , jestliže existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Tuto limitu označujeme znakem $f'(x_0)$ a nazýváme derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 .

Zápis: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

možné zápisy derivací:

$$\begin{aligned} & f'(x_0) \\ & y'(x_0) \\ & \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

DERIVACE KONSTANTNÍ FUNKCE:

$$f'(x_0) = (\text{konst.})' = 0$$

DERIVACE SOUČINU KONSTANTY A FUNKCE:

$$[c \cdot f(x_0)]' = c \cdot f'(x_0)$$

DERIVACE SOUČTU A ROZDÍLU:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

DERIVACE SOUČINU:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

DERIVACE PODÍLU:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}; \quad g(x) \neq 0$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VZORCE PRO DERIVOVÁNÍ:

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$

$$[e^x]' = e^x$$

$$[a^x]' = a^x \cdot \ln a; \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}; \quad x > 0$$

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$$

$$[\sin x]' = \cos x$$

$$[\cos x]' = -\sin x$$

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \cos x \neq 0$$

$$[\cot x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad \sin x \neq 0$$

Věta 1:

Funkce má v intervalu $(a; b)$ derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě intervalu $(a; b)$.

Věta 2:

Má-li funkce f má v bodě x_0 derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYUŽITÍ DERIVACE FUNKCE:

V MATEMATICE

- určování průběhu funkcí
- sestrojení grafů
- určení extrémů

V GEOMETRII

- směrnice tečny grafu funkce v bodě

VE FYZICE

- 1. derivace dráhy podle času = okamžitá rychlost
- 2. derivace dráhy podle času = okamžité zrychlení

Řešený příklad 5:

Určete 1. derivace funkcí:

a) $f : y = x^2$

b) $f : y = x^7$

c) $f : y = \sqrt{x}$

d) $f : y = \sqrt[3]{x}$

e) $f : y = \frac{1}{x^5}$

f) $f : y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

g) $f : y = \frac{2}{3}x^6$

h) $f : y = \frac{7}{x^2}$

i) $f : y = \frac{2}{\sqrt{x}}$

j) $f : y = \frac{1}{3}x^6 + \frac{5x^7}{2} - 6$

k) $f : y = (3x - 5) \cdot e^x$

l) $f : y = \frac{5x^7 + 4}{2x - 1}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

a) $y = x^2$

$$y' = 2 \cdot x^1 = 2 \cdot x$$

b) $y = x^7$

$$y' = 7 \cdot x^6$$

c) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

d) $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$$

e) $y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$

$$y' = -5 \cdot x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$$

g) $y = \frac{2}{3} x^6$

$$y' = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot x^5 = 4x^5$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

h) $y = \frac{7}{x^2} = 7x^{-2}$

$$y' = -14x^{-3} = -\frac{14}{x^3}$$

i) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} = 2x^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -1 \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{x^2}$$

j) $y = \frac{1}{3}x^6 + \frac{5x^7}{2} - 6$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x^5 + \frac{5}{2} \cdot 7 \cdot x^6 - 0$$

$$y' = 2x^5 + \frac{35}{2}x^6 = 2x^5 \cdot \left(1 + \frac{35}{4}x\right)$$

k) $y = (3x-5) \cdot e^x$

$$y' = (3x-5)' \cdot e^x + (3x-5) \cdot (e^x)'$$

$$y' = 3 \cdot e^x + (3x-5) \cdot e^x = e^x \cdot (3+3x-5) = e^x \cdot (3x-2)$$

l) $y = \frac{5x^7+4}{2x-1}$

$$y' = \frac{(5x^7+4)' \cdot (2x-1) - (5x^7+4) \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2}$$

$$y' = \frac{35x^6 \cdot (2x-1) - (5x^7+4) \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{70x^7 - 35x^6 - 10x^7 - 8}{(2x-1)^2} = \frac{60x^7 - 35x^6 - 8}{(2x-1)^2}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST C – DERIVACE ZÁKLADNÍ FUNKCE

Příklad 1:

Vypočtěte 1. derivace funkcí:

1) $f : y = 4x^7$

2) $f : y = \frac{1}{x^5}$

3) $f : y = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$

4) $f : y = 4x^3 + 5$

5) $f : y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{2} + \frac{12}{5}x^5 - \frac{6}{7}x^7$

6) $f : y = x^3 \cdot \ln x$

7) $f : y = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$

8) $f : y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

9) $f : y = (x^{17} + 1) \cdot (3x^4 + x^2 - 2x)$

10) $f : y = \sin x \cdot \cos x$

11) $f : y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

12) $f : y = 2 - \frac{3}{x}$

13) $f : y = \frac{x - 1}{x + 2}$

14) $f : y = \frac{2x - 3}{x - 1}$

15) $f : y = \frac{x^2 + 3}{2x}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$16) f : y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$17) f : y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$18) f : y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$19) f : y = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}} - \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$20) f : y = \frac{2\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$21) f : y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 + 3x + 5)$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$22) f : y = \frac{\cos x - 1}{\sin x}$$

$$23) f : y = x^4 - 3x^2 + \frac{x}{2} - 2$$

$$24) f : y = \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$25) f : y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

Příklad 2:

Vypočtete derivaci funkce $f : y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x}$; $x \neq 0$ v bodě:

a) $x_0 = 2$

b) $x_0 = -3$

c) $x_0 = 0$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3:

Vypočtěte 2. a 3. derivaci funkcí:

a) $f : y = x^7 - 3x^3$

b) $f : y = -2x^5 - 3x^2$

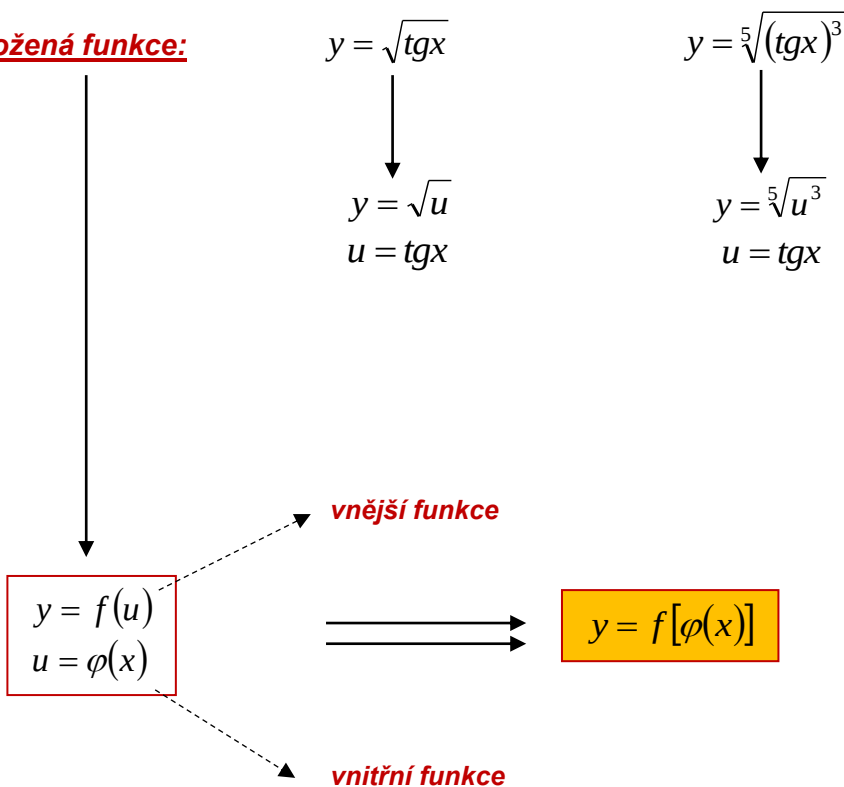
c) $f : y = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2}$

d) $f : y = \sqrt[3]{x^2}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

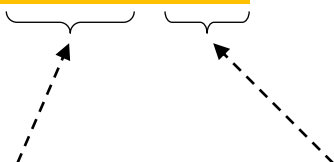
Složená funkce:



Věta:

Nechť funkce φ má derivaci v bodě x_0 a funkce f má derivaci v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$. Pak složená funkce $F : y = f[\varphi(x)]$ má derivaci v bodě x_0 a platí:

$$F'(x_0) = y' = f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0)$$



Derivaci vnější funkce vynásobíme derivací vnitřní funkce.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešený příklad 5:

Vypočtěte derivace funkcí:

- a) $f : y = (x^2 + 1)^3$
- b) $f : y = \sqrt[4]{(2x^3 - 7)}$
- c) $f : y = \ln^2 x$
- d) $f : y = \cos^5 x$
- e) $f : y = \sin x^5$
- f) $f : y = \sin(3x - 2)$

Řešení:

a) $y = (x^2 + 1)^3$
 $y' = \underbrace{3(x^2 + 1)^2}_{\text{derivace vnější funkce}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivace vnitřní funkce}}$

$y' = 6x(x^2 + 1)^2$

b) $y = \sqrt[4]{(2x^3 - 7)} = (2x^3 - 7)^{\frac{1}{4}}$
 $y' = \underbrace{\frac{1}{4}(2x^3 - 7)^{-\frac{3}{4}}}_{\text{derivace vnější funkce}} \cdot \underbrace{6x^2}_{\text{derivace vnitřní funkce}} = \frac{6x^2}{4 \cdot (2x^3 - 7)^{\frac{3}{4}}} = \frac{6x^2}{4 \cdot \sqrt[4]{(2x^3 - 7)^3}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[4]{(2x^3 - 7)}}{\sqrt[4]{(2x^3 - 7)}}}_{\text{rozšíření zlomku}}$

$y' = \frac{6x^2 \cdot \sqrt[4]{(2x^3 - 7)}}{4 \cdot \sqrt[4]{(2x^3 - 7)^4}}$

$y' = \frac{3x^2 \cdot \sqrt[4]{(2x^3 - 7)}}{2 \cdot (2x^3 - 7)}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

c) $y = \ln^2 x$

$$y' = \underbrace{2 \cdot \ln x}_{\text{derivace vnější funkce}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{derivace vnitřní funkce}}$$

$$\underline{y' = \frac{2 \cdot \ln x}{x}}$$

d) $y = \cos^5 x$

$$y' = \underbrace{5 \cdot \cos^4 x}_{\text{derivace vnější funkce}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\text{derivace vnitřní funkce}}$$

$$\underline{y' = -5 \cdot \sin x \cdot \cos^4 x}$$

e) $y = \sin x^5$

$$y' = \underbrace{\cos x^5}_{\text{derivace vnější funkce}} \cdot \underbrace{5x^4}_{\text{derivace vnitřní funkce}}$$

$$\underline{y' = 5x^4 \cdot \cos x^5}$$

f) $y = \sin(3x - 2)$

$$y' = \underbrace{\cos(3x - 2)}_{\text{derivace vnitřní funkce}} \cdot \underbrace{3}_{\text{derivace vnitřní funkce}}$$

$$\underline{y' = 3 \cdot \cos(3x - 2)}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST D – DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

Příklad:

Vypočtete derivace složených funkcí:

1) $f : y = (x^5 + 2x + 1)^7$

2) $f : y = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$

3) $f : y = \sin x \cdot \cos^2 x$

4) $f : y = \sin x \cdot \cos x^2$

5) $f : y = \sin(x^3 + 2x)$

6) $f : y = \sin^2(x^2 - 3x)$

7) $f : y = e^{4x^2 + 3}$

8) $f : y = \left(\frac{2}{x} + 1\right)^3$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

9) $f : y = x \cdot \operatorname{tg}^2 x$

10) $f : y = \sin^3(5x - 3)$

11) $f : y = (x^2 - 2)^3 \cdot \cos^2 x$

12) $f : y = a^{3x}$

13) $f : y = \ln(x^4 - 2x)$

14) $f : y = \ln^2(\sin x)$

15) $f : y = 3^{\sqrt{x}}$

16) $f : y = \cos \sqrt{x}$

17) $f : y = \sqrt{\cos x}$

18) $f : y = \sin 2x \cdot \cos 3x$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

19) $f : y = \operatorname{tg}^3 2x$

20) $f : y = x \cdot \sqrt{1+x^2}$

21) $f : y = \sin^4 x - \cos x^4$

22) $f : y = \cos x \cdot \sqrt{1+\sin^3 x}$

23) $f : y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury a internetových zdrojů

Výukové materiály a některé úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

D. HRUBÝ, J. KUBÁT: Matematika pro gymnázia Diferenciální a integrální počet. Prometheus, 2006

J. PETÁKOVÁ: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.

Prometheus, 1998

P. BOUCNÍK, J. HERMAN, P. KRUPKA, J. ŠIMŠA: Odmaturuj z matematiky 3. Didaktis 2004

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Tangens>

http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Funci%C3%B3n_inversa.png

<http://studentigih.ttweb.sk/zemianek/kosinus.html>

<http://garaz.autorevue.cz/viewtopic.php?f=819&t=1073058>