

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

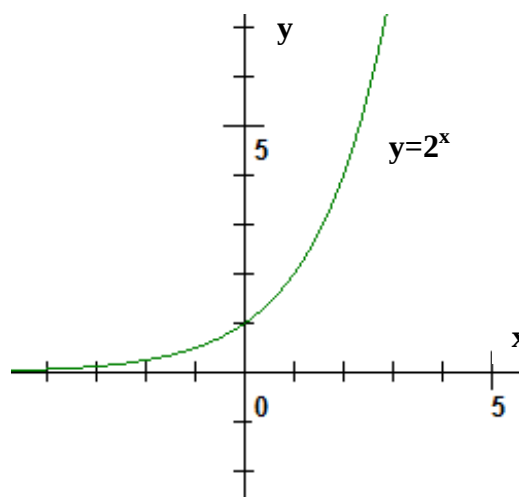
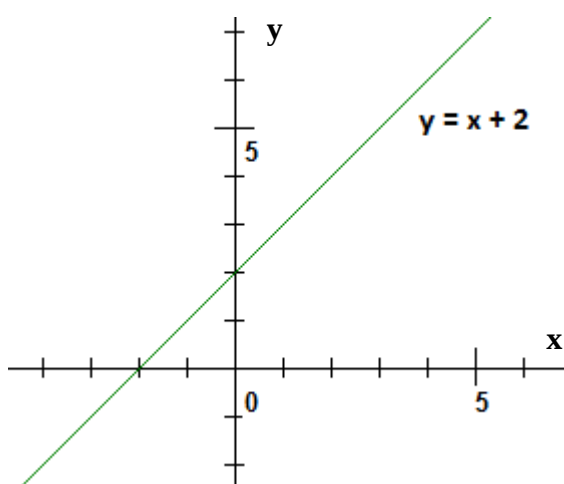
<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	ČTVRTÝ	Mgr. Tomáš MAŇÁK	25. srpna 2012
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
DERIVACE A MONOTÓNNOST FUNKCE			

DERIVACE A MONOTÓNNOST FUNKCE

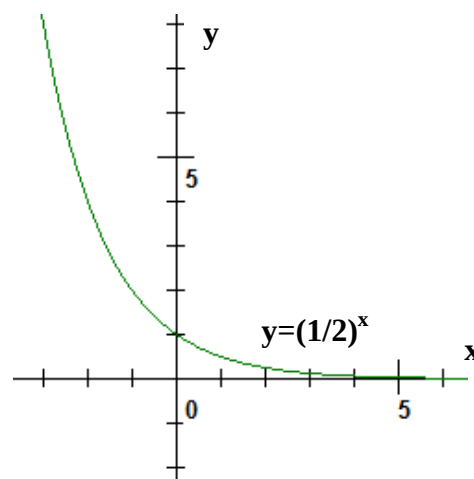
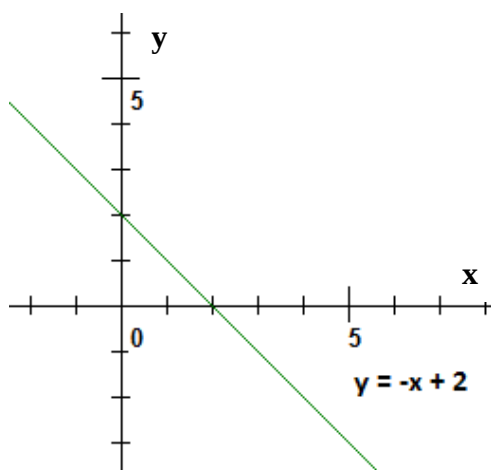
Říkáme, že funkce $f: y = f(x)$ je monotónní na celém svém definičním oboru $D(f)$, jestliže je rostoucí $\forall x \in D(f)$ nebo jestliže je klesající $\forall x \in D(f)$.

Příklady monotónních funkcí:

a) rostoucích:



b) klesajících:

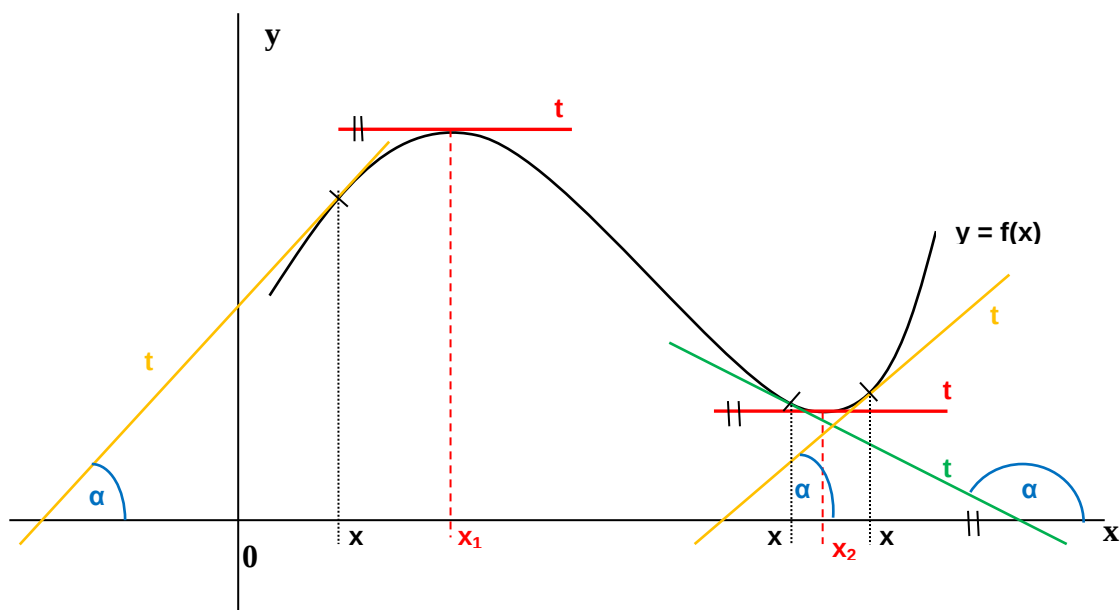


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

U funkcí, které nejsou monotónní na celém definičním oboru, nás zajímá, zda jsou monotónní alespoň na částech definičního oboru.

Zjištění monotónnosti funkce tedy znamená, určit, ve kterých intervalech je daná funkce

$f: y = f(x)$ rostoucí a ve kterých intervalech je klesající. K tomuto účelu nám mohou posloužit vlastnosti první derivace funkce.



$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = k_t = \operatorname{tg} \alpha > 0$$

f je rostoucí pro
 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$f'(x) = k_t = \operatorname{tg} \alpha < 0$$

f je klesající pro $x \in (x_1; x_2)$

SHRNUTÍ !!!

- 1) Je-li $f'(x_0) > 0$, pak je funkce $f(x)$ v bodě x_0 rostoucí.
- 2) Je-li $f'(x_0) < 0$, pak je funkce $f(x)$ v bodě x_0 klesající.

Jestliže má funkce $f(x)$ v každém bodě intervalu $(a; b)$ kladnou (zápornou) první derivaci, pak je v tomto intervalu rostoucí (klesající).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešené příklady:

Příklad 1

Určete, pro která $x \in D(f)$ daná funkce $f: y = \frac{x}{x^2 + 1}$ roste (klesá). (Určete intervaly monotónnosti dané funkce.)

Řešení:

- 1) Určíme definiční obor funkce.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

- 2) Vypočteme první derivaci funkce - použijeme vzorec pro derivaci podílu dvou funkcí

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x)' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Dále můžeme postupovat dvěma různými způsoby:

1. způsob:

- 3) Určíme, pro která $x \in D(f)$ je $y' > 0$ (funkce roste) a pro která je $y' < 0$ (funkce klesá).

- a) $y' > 0$ (funkce roste)

$$\frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2} > 0$$

$$(1 - x)(1 + x) > 0 \quad \wedge \quad (x^2 + 1)^2 > 0$$

$$1 - x^2 > 0 \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R}$$

$$-x^2 > -1$$

$$x^2 < 1$$

$$|x| < 1$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{x \in (-1; 1)}$$

Funkce f roste pro $x \in (-1; 1)$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) $y' < 0$ (funkce klesá)

$$\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} < 0$$

$$(1-x)(1+x) < 0 \quad \wedge \quad (x^2+1)^2 > 0$$

$$1-x^2 < 0 \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R}$$

$$-x^2 < -1$$

$$x^2 > 1$$

$$|x| > 1$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

Funkce f klesá pro $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

4) Vyslovíme závěr:

Funkce f roste pro $x \in (-1; 1)$.

Funkce f klesá pro $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

2. způsob:

3) Určíme, pro která $x \in D(f)$ je $y' > 0$ (funkce roste) a pro která je $y' < 0$ (funkce klesá).

Využijeme metody nulových bodů. Výsledek první derivace položíme roven nule a nalezneme tzv. nulové body (body, v nichž se mění zakřivení křivky – viz obrázek výše)

$$\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \text{zlomek je roven nule, je-li roven nule jeho čítec}$$

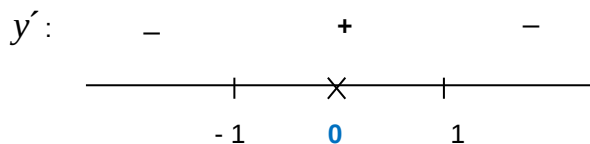
$$(1-x)(1+x) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad \text{nulové body}$$

Dále pokračujeme již známou **metodou nulových bodů**. (Nakreslíme číselnou osu; vyznačíme na ni nulové body; nulové body rozdělí číselnou osu na jednotlivé intervaly; zvolíme libovolné číslo (v tomto případě např. číslo 0), ale nikoliv krajní body intervalů; zvolené číslo dosadíme do výsledku první derivace a zjistíme, zda výsledkem je kladná nebo záporná hodnota; nad daný interval s námi zvoleným číslem pak napíšeme kladné nebo záporné znaménko, podle výsledku výpočtu (po dosazení zvolené hodnoty 0, jsme získali číslo 1, tj. číslo kladné, proto nad prostřední interval zapíšeme znaménko +); znaménka v dalších intervalech většinou prostřídáme (hodnotu první derivace můžeme zjišťovat i v každém intervalu zvlášť, dosazením libovolného prvku ze vzniklých intervalů do výsledku první derivace); na základě kladné nebo záporné hodnoty první

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

derivace určíme, ve kterých intervalech je funkce rostoucí $y' > 0$ a ve kterých je klesající $y' < 0$).



- 4) Vyslovíme závěr podle věty: Je-li $y' > 0$ (kladná), pak je funkce v daném intervalu rostoucí a je-li $y' < 0$ (záporná), pak je funkce v daném intervalu klesající.

Funkce f roste pro $x \in (-1; 1)$.

Funkce f klesá pro $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

Příklad 2

Zjistěte, ve kterých intervalech roste a ve kterých klesá funkce $f : y = x^3 - 12x + 1$.

Řešení:

- 1) Určíme definiční obor funkce.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

- 2) Vypočteme první derivaci funkce – pomocí základních vzorců pro derivaci funkčního mnohočlenu.

$$y' = (x^3 - 12x + 1)' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$$

Dále můžeme postupovat opět dvěma různými způsoby:

1. způsob:

- 3) Určíme, pro která $x \in D(f)$ je $y' > 0$ (funkce roste) a pro která je $y' < 0$ (funkce klesá).

- a) $y' > 0$ (funkce roste)

$$3x^2 - 12 > 0$$

$$3x^2 > 12$$

$$x^2 > 4$$

$$|x| > 2$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$$

Funkce f roste pro $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) $y' < 0$ (funkce klesá)

$$3x^2 - 12 < 0$$

$$3x^2 < 12$$

$$x^2 < 4$$

$$|x| < 2$$

$$x \in (-2; 2)$$

Funkce f klesá pro $x \in (-2; 2)$.

4) Vyslovíme závěr:

Funkce f roste pro $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Funkce f klesá pro $x \in (-2; 2)$.

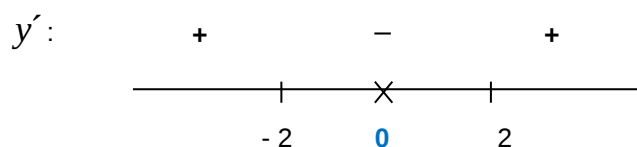
2. způsob:

3) Určíme, pro která $x \in D(f)$ je $y' > 0$ (funkce roste) a pro která je $y' < 0$ (funkce klesá).

Využijeme metody nulových bodů. Výsledek první derivace položíme roven nule a nalezneme tzv. nulové body. Pokračujeme stejným způsobem jako v řešeném příkladu 1.

$$3(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 2 \vee x_2 = -2 \quad \text{nulové body}$$



4) Vyslovíme závěr podle věty: Je-li $y' > 0$ (kladná), pak je funkce v daném intervalu rostoucí a je-li $y' < 0$ (záporná), pak je funkce v daném intervalu klesající.

Funkce f roste pro $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Funkce f klesá pro $x \in (-2; 2)$.

Příklad 3

Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = \frac{1}{40}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2)$.

Řešení:

1) Určíme definiční obor funkce.

$$D(f) = R$$

- 2) Vypočteme první derivaci funkce – pomocí vzorce pro derivaci $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $c = konst.$

$$y' = \left(\frac{1}{40} (3x^4 - 4x^3 - 36x^2) \right)' = \frac{1}{40} (3x^4 - 4x^3 - 36x^2)' = \frac{1}{40} (12x^3 - 12x^2 - 72x) =$$

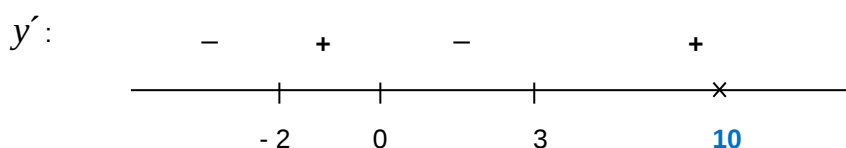
$$= \frac{12}{40} (x^3 - x^2 - 6x) = \frac{12}{40} x(x^2 - x - 6) = \frac{3}{10} x(x-3)(x+2)$$

Dále budeme postupovat 2. způsobem řešení.

- 3) Určíme, pro která $x \in D(f)$ je $y' > 0$ (funkce roste) a pro která je $y' < 0$ (funkce klesá).
Využijeme metody nulových bodů. Výsledek první derivace položíme roven nule a nalezneme tzv. nulové body. Pokračujeme stejným způsobem jako v předchozích řešených příkladech.

$$\frac{3}{10} x(x-3)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -2 \quad \text{nulové body}$$



- 4) Vyslovíme závěr podle věty: Je-li $y' > 0$ (kladná), pak je funkce v daném intervalu rostoucí a je-li $y' < 0$ (záporná), pak je funkce v daném intervalu klesající.

Funkce f roste pro $x \in (-2; 0) \cup (3; \infty)$.

Funkce f klesá pro $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 3)$.

Příklad 4

Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = \frac{x^2}{x-2}$.

Řešení:

- 1) Určíme definiční obor funkce.

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

- 2) Vypočteme první derivaci funkce - použijeme vzorec pro derivaci podílu dvou funkcí

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-2} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x-2) - x^2 \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2x \cdot (x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

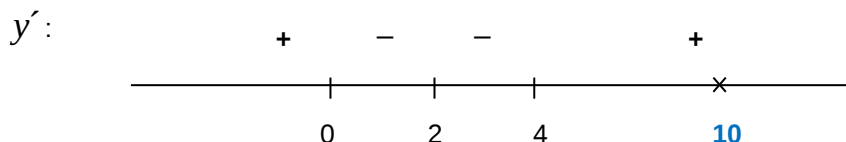
- 3) Určíme, pro která $x \in D(f)$ je $y' > 0$ (funkce roste) a pro která je $y' < 0$ (funkce klesá). Využijeme metody nulových bodů. Výsledek první derivace položíme roven nule a nalezneme tzv. nulové body. Pokračujeme stejným způsobem jako v předchozích řešených příkladech.

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \quad \text{zlomek je roven nule, je-li roven nule jeho čítec; } x \neq 2 \text{ (podm.)}$$

$$x_1 = 0 \vee x_2 = 4 \quad \text{nulové body}$$

Na číselné ose vyznačíme kromě nulových bodů derivace také číselnou hodnotu, pro kterou derivace neexistuje (podmínky pro derivaci) i podmínku existence dané funkce (krok 1 - $D(f)$).

Dále pak postupujeme známými kroky metody nulových bodů. Dáváme si pozor na získané hodnoty derivace v jednotlivých intervalech (znaménka se nestřídají z důvodu podmínky – vyloučení některých číselných hodnot z množiny reálných čísel).



- 4) Vyslovíme závěr podle věty: Je-li $y' > 0$ (kladná), pak je funkce v daném intervalu rostoucí a je-li $y' < 0$ (záporná), pak je funkce v daném intervalu klesající.

Funkce f roste pro $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$.

Funkce f klesá pro $x \in (0; 2) \cup (2; 4)$.

Úlohy k procvičování

- 1) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x^3 - 3x$.
- 2) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x^3 - 12x$.
- 3) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2$.
- 4) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x^5 - 10x^3 + 40x$.
- 5) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = 3x - x^3$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 6) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x^5 - x^3$.
- 7) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- 8) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = \frac{x}{1 - x^2}$.
- 9) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = -x^2 + 2x + 3$.
- 10) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = 2x^3 - 3x^2$.
- 11) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x^3 + x^2 + x + 1$.
- 12) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = (2x + 3)(x^2 + x + 1)$.
- 13) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x + \frac{1}{x}$.
- 14) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.
- 15) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = \frac{x}{x^2 + 2x + 9}$.
- 16) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$.
- 17) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.
- 18) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = \frac{x^2}{x - 2}$.
- 19) Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = \frac{x^2 - 3}{x^3}$.

Použitá literatura:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.
M. Dostálová, D. Pešatová: Matematika 7. část - učební materiály SPŠ Ostrava – Vítkovice
D. Hrubý, J. Kubát: Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet, Prometheus 1997
I. Dušek: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN 1988