

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	TŘETÍ	Mgr. Tomáš MAŇÁK	27. června 2013
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
KOMBINATORIKA – KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU A SOUČTU, VARIACE, PERMUTACE, FAKTORIÁLY			

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU A SOUČTU

Motivační příklad 1:

Určete, kolik dvojjazyčných slovníků je třeba vydat, aby byla zajištěna možnost přímého překladu z ruského, anglického, německého a francouzského jazyka do každého z nich.

Řešení:

Každý slovník zapíšeme jako uspořádanou dvojici. Je třeba vydat tyto slovníky:

[R;A], [R;N], [R;F],
[A;R], [A;N], [A;F],
[N;R], [N;A], [N;F],
[F;R], [F;A], [F;N].

Pro výběr prvního členu uspořádané dvojice máme **čtyři možnosti** výběru a po provedeném výběru jsou pro výběr druhého členu už jen **tři možnosti** výběru.

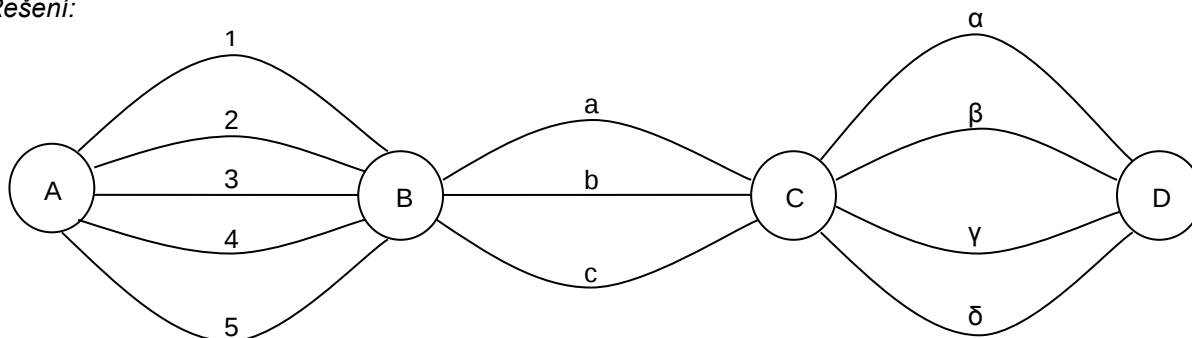
Hledaný počet všech uspořádaných dvojic je roven součinu $4 \cdot 3 = 12$.

Je nutné vydat 12 dvojjazyčných slovníků.

Motivační příklad 2:

Z města A do města B vede pět cest, z města B do města C vedou tři cesty a z města C do města D čtyři cesty. Určete počet cest, které vedou z města A do města D přes města B a C.

Řešení:



Každou cestu z A do D přes B a C lze napsat jako uspořádanou trojici.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro výběr prvního členu uspořádané trojice máme **pět možností** výběru (1, 2, 3, 4, 5), po provedeném prvním výběru jsou pro výběr druhého členu trojice **tři možnosti** (a, b, c) a po provedeném druhém výběru jsou pro výběr třetího členu uspořádané trojice **čtyři možnosti** výběru (α, β, γ, δ). Celkový počet cest je roven součinu $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$.

Počet cest, které vedou z města A do města D přes B a C, je **60 cest**.

Motivační příklad 3:

Určete počet všech trojiciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení:

Trojiciferná čísla lze považovat za uspořádané trojice.

První člen této trojice lze vybrat právě **devíti způsoby** (na prvním místě může být jakákoliv cifra kromě 0).

Druhý člen této trojice lze vybrat právě **devíti způsoby** (na druhém místě nesmí být stejná cifra jako na prvním místě, ale přibyla cifra 0, kterou již můžeme použít).

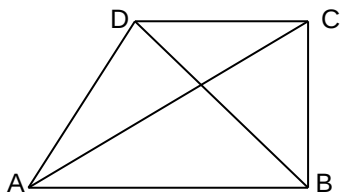
Třetí člen této trojice lze vybrat **osmi způsoby** (zbývá už jen osm cifer k použití).

Celkem existuje $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ **trojiciferných přirozených čísel** požadovaných vlastností.

Motivační příklad 4:

Je dán konvexní čtyřúhelník. Kolik přímek je určeno vrcholy tohoto čtyřúhelníku?

Řešení:



Každou přímku můžeme chápat jako uspořádanou dvojici.

První člen této dvojice můžeme vybrat právě **čtyřmi způsoby** (na prvním místě může být bod A, B, C nebo D). Druhý člen dvojice, po vybrání prvního členu, můžeme vybrat už jen **třemi způsoby**.

Existuje tak $4 \cdot 3 = 12$ uspořádaných dvojic $[X; Y]$, určujících přímku.

Uvědomme si, že přímka AB je ta samá přímka, jako přímka BA atd. Tedy dvě uspořádané dvojice $[A; B]$ a $[B; A]$ vyjadřují tutéž přímku.

Abychom získali počet všech požadovaných přímek, musíme získaný počet uspořádaných dvojic dělit dvěma.

Přímek je tedy celkem $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Vrcholy konvexního čtyřúhelníku je určeno **6 přímek**.

Motivační příklad 5:

Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně je zvoleno n jejích vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy X, Y, Z leží v daných bodech a na různých stranách čtverce ABCD.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

Trojúhelník můžeme chápat jako uspořádanou trojici $[X;Y;Z]$.

Vrchol X je možné zvolit **$4n$ způsoby**. Po výběru bodu X lze vrchol Y volit **$3n$ způsoby**, neboť nesmí ležet na téže straně čtverce ABCD jako bod X. Po výběru bodu Y je možno vrchol Z vybrat **$2n$ způsoby**, neboť nesmí ležet na těch stranách čtverce ABCD, na nichž leží body X, Y. Existuje tedy $4n \cdot 3n \cdot 2n = 24n^3$ **uspořádaných trojic $[X;Y;Z]$** .

Uvědomme si, že 6 uspořádaných trojic určuje stejný trojúhelník XYZ.

$[X;Y;Z] = [X;Z;Y] = [Z;X;Y] = [Z;Y;X] = [Y;X;Z] = [Y;Z;X] =$ jeden trojúhelník XYZ

Počet všech trojúhelníků požadované vlastnosti získáme tak, že počet všech uspořádaných trojic dělíme šesti.

Trojúhelníků dané vlastnosti je celkem $\frac{24n^3}{6} = 4n^3$.

Na základě předchozích řešených motivačních příkladů můžeme vyslovit závěr:

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU:

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat právě n_1 -způsoby; druhý člen, po výběru prvního členu, právě n_2 -způsoby atd.; až k-tý člen, po výběru (k-1)-ho členu, právě n_k -způsoby, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

kromě kombinatorického pravidla součinu často v kombinatorice používáme pravidlo součtu:

PRAVIDLO SOUČTU:

Jestliže lze v prvním případě zvolit m různých způsobů a ve druhém případě (nezávisle na prvním)

lze volit n různých způsobů, pak počet všech způsobů, kterými lze provést volbu je $m + n$.

SHRNUTO:

Kombinatorika se zabývá vytvářením k-členných skupin z dané n-prvkové množiny.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 5) V košíku je 12 jablek a 10 hrušek. Petr si má z nich vybrat buď jablko nebo hrušku tak, aby Věra, která si po něm vybere jedno jablko a jednu hrušku, měla co největší možnost výběru. Určete, co Petr vybere.
- 6) Kolik přímek je určeno vrcholy konvexního dvacetičtyřúhelníku?
- 7) Kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat dvě různobarevná pole tak, aby obě neležela v téže řadě ani v téže sloupci.
- 8) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, jejichž dekadický zápis je složen z číslic 1, 2, 3, 4, 5 (každá z nich se může opakovat), která jsou dělitelná:
- pěti,
 - dvěma,
 - čtyřmi.
- 9) Z města A do města B vedou 4 cesty, z města B do města C 3 cesty. Určete počet způsobů, kterými lze vybrat trasu:
- z města A do města C a zpět,
 - z města A do města C a zpět tak, že z těchto sedmi cest není žádná použita dvakrát,
 - z města A do města C a zpět tak, že těchto sedmi cest jsou právě dvě použity dvakrát.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VARIACE BEZ OPAKOVÁNÍ

Teorie:

Variace k-té třídy z n-prvků bez opakování, dané základní n-prvkové množiny ($0 \leq k \leq n$), je každá **uspořádaná k-tice** sestavená pouze z těchto n-prvků tak, že **každý je v ní obsažen nejvýše jednou**.

(záleží na pořadí prvků a dané prvky se neopakují)

Symbolický zápis: $V(k;n)$ nebo $V_k(n)$

Pro počet všech variací k-té třídy z n-prvků bez opakování platí vzorec:

$$V(k;n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

v součinu je právě k-činitelů

variace k-té třídy z n-prvků bez opakování

$$V(k;n) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$V(k;n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Důležitá informace!

n-faktoriál (zapisujeme $n!$)

pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

pro $n = 0$ definujeme

$$0! = 1$$

např.: $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$2! = 2 \cdot 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$



evropský
sociální
fond v ČR



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešený příklad 1:

Ze čtyř chlapců, kteří se jmenují Adam, Michal, Radek a Pavel je třeba vybrat na branné cvičení tříčlennou hlídku, v níž bude určen velitel, chemik a zdravotník. Kolika způsoby lze hlídku vytvořit?

Řešení:

V tříčlenné hlídce záleží na uspořádání prvků a jednotlivé prvky nemůžeme opakovat (Pavel nemůže být chemik a zdravotník současně; stejná trojice chlapců se může ve svých funkcích prohodit – proto záleží na pořadí prvků v trojici $\Rightarrow$ jedná se o **variace bez opakování**)

Vytváříme tříčlenné variace ze čtyř prvků bez opakování.

$$V(3;4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Hlídku lze vytvořit **24 různými způsoby**.

Řešený příklad 2:

Kolik různých umístění může být na prvních třech místech při hokejovém mistrovství světa, jestliže se ho zúčastnilo osm družstev?

Řešení:

Vytváříme uspořádané trojice z osmi prvků. V trojici se prvky nemohou opakovat (ČR nemůže být současně na prvním a třetím místě; stejná trojice zemí se na prvních třech místech může vzájemně prohodit a vytvářet tak jiné umístění $\Rightarrow$ záleží na pořadí prvků v trojici $\Rightarrow$ jedná se o **variace bez opakování**).

Vytváříme **variace 3. třídy z 8 prvků bez opakování**.

$$V(3;8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Na hokejovém mistrovství světa může na prvních třech místech nastat **336 různých umístění**.

Řešený příklad 3:

Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu jsou každé dvě cifry různé.

Řešení:

počet cifer = 10 $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) \Rightarrow$ 10 prvků $\Rightarrow$ **n = 10**

$\dots \Rightarrow$ vytváříme uspořádanou šestici (záleží na pořadí cifer v šestici) $\Rightarrow$ **k = 6** $\Rightarrow$ variace;

cifry se v zápisu čísla nesmí opakovat $\Rightarrow$ **variace 6. třídy z 10 prvků bez opakování**

$$V(6;10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$$

Pozor! Ze všech takto vytvořených uspořádaných šestic musíme odečíst ty uspořádané šestice, které začínají cifrou nula 0 a další cifry již jsou různé (nejednalo by se tak o šesticiferné přirozené číslo). $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ nutno odečíst tvary: **0** $\Rightarrow$ $V(5;9) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Shrnuto – celkem: $V(6;10) - V(5;9) = 151200 - 15120 = 136080$

Celkem lze vytvořit 136 080 přirozených čísel požadovaných vlastností.

Řešený příklad 4:

Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž dekadickém zápisu jsou pouze cifry 4,5,6,7 a to každá nejvýše jednou.

Řešení:

Musíme si uvědomit, že z požadovaných cifer můžeme sestavit trojčíslná, dvojčíslná nebo jednocíslná přirozená čísla:

- 1) Trojčíslná čísla požadované vlastnosti musí začínat cifrou 4, protože jejich hodnota musí být menší než 500.
 $4 \dots \Rightarrow$ vytváříme už jen uspořádanou dvojici tvořenou zbývajících možnými prvky tj. 5 nebo 6 nebo 7 $\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou dvojici ze tří prvků $\Rightarrow$ jejich počet vypočteme jako **variace 2. třídy z 3 prvků bez opakování** $\Rightarrow V(2;3) = 3 \cdot 2 = 6$
 Z daných cifer lze vytvořit 6 trojčíslných přirozených čísel.
- 2) Dále můžeme vytvářet čísla dvojčíslná, požadovaných vlastností $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ tvoříme uspořádanou dvojici (dvojčíslné číslo) ze čtyř prvků (4,5,6,7) bez opakování $\Rightarrow$ jejich počet vypočteme jako **variace 2. třídy ze 4 prvků bez opakování**: $V(2;4) = 4 \cdot 3 = 12$
 Z daných cifer lze vytvořit 12 dvojčíslných přirozených čísel.
- 3) Jednocíslná čísla jsou pak čísla 4,5,6,7 $\Rightarrow$ celkem 4 přirozená čísla.

Shrnuto – celkem: $V(2;3) + V(2;4) + 4 = 6 + 12 + 4 = 22$

Z daných cifer lze celkem vytvořit 22 přirozených čísel požadovaných vlastností.

Řešený příklad 5:

Řešte rovnice pro přípustná n:

- a) $V(2;n) = 210$
- b) $V(2;n-2) + V(2;n+1) = 22$

Řešení:

- a) $V(2;n) = 210 \quad (n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2)$ symbolický zápis převedeme na matematický tvar
 $n \cdot (n-1) = 210$ výraz na levé straně roznásobíme
 $n^2 - n - 210 = 0$ získáme kvadratickou rovnici
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-210) = 1 + 840 = 841$ vypočteme diskriminant

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 29}{2 \cdot 1}$$

$$n_1 = \frac{30}{2} = 15 \in N$$

$$n_2 = \frac{-28}{2} = -14 \notin N$$

vypočteme kořeny kvadratické rovnice
a určíme správné řešení

Řešením rovnice je číslo $n = 15 \Rightarrow K = \{15\}$ **zapišeme množinu kořenů rovnice**

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

b) $V(2; n-2) + V(2; n+1) = 22 \quad (n \in N \wedge n \geq 4)$

$$(n-2) \cdot (n-3) + (n+1) \cdot n = 22$$

$$n^2 - 5n + 6 + n^2 + n = 22$$

$$2n^2 - 4n - 16 = 0$$

$$n^2 - 2n - 8 = 0$$

$$(n-4) \cdot (n+2) = 0$$

$$n_1 = 4 \in N \wedge \text{vyhovuje podm.}$$

$$n_2 = -2 \notin N$$

symbolický zápis převedeme na
matematický tvar;
výraz na levé straně roznásobíme
a upravíme;
získáme kvadratickou rovnici;
kvadratickou rovnici upravíme;
rovnici řešíme rozkladem na
součin kořenových činitelů

určíme kořeny a správné řešení
kvadratické rovnice.

Řešením rovnice je číslo $n = 4 \Rightarrow K = \{4\}$

zapišeme množinu kořenů rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Řešený příklad 6:

Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet variací 3. třídy bez opakování o 384. Určete, kolik je prvků.

Řešení:

Na základě zadání sestavíme symbolickou rovnici:

$$V(3; n+2) = V(3; n) + 384 \quad (n \in N \wedge n \geq 3)$$

$$(n+2) \cdot (n+1) \cdot n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) + 384$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - 3n^2 + 2n + 384$$

$$6n^2 - 384 = 0$$

$$6n^2 = 384$$

symbolický zápis převedeme na matematický tvar
výraz na levé straně roznásobíme
rovnici upravíme a získáme neúplnou
kvadratickou rovnici
rovnici vyřešíme známými postupy řešení



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$n^2 = 64$$

$$|n| = 8$$

$$n_{1,2} = \pm 8$$

$$n = 8$$

určíme správné řešení rovnice (kořen: (-8)

nevyhovuje podmínce řešitelnosti rovnice)

Řešením rovnice je číslo $n = 8 \Rightarrow K = \{8\}$

zapišeme množinu kořenů rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list B

- 1) Výbor TJ tvoří 10 lidí. Z nich je třeba vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře. Kolik způsobů to lze provést?
- 2) K sestavení vlajky, skládající se ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky těchto barev: červená, žlutá, modrá, bílá a zelená. Kolik uvedených vlajek lze z těchto látek sestavit?
- 3) Ve finále olympijského sprintu na 100 m startuje 8 závodníků. Určete počet způsobů, jimiž se mohou rozdělit o zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili.
- 4) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu jsou každé dvě cifry různé
- 5) Určete počet všech šestimístních telefonních čísel, v nichž se každá cifra vyskytuje nejvýše jednou.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 6) Kolik trojčiferných přirozených čísel dělitelných pěti lze sestavit z číslic:
- 1,2,3,4,5,
 - 0,1,2,3,4,5,
- jestliže je možno každou číslici v každém zápisu čísla použít nejvýše jednou.
- 7) K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.
- Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
 - Kolik z nich má modrý pruh?
 - Kolik jich má modrý pruh uprostřed?
 - Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?
- 8) Řešte rovnici:
- $$V(2; n + 1) = 156$$
- 9) Určete počet prvků, z nichž lze vytvořit:
- 240 dvoučlenných variací,
 - dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 10) O telefonním čísle svého spolužáka si Vašek zapamatoval jen to, že je devítimístné, začíná dvojčíslím 23, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné 25. Kolik telefonních čísel přichází v úvahu?
- 11) Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet tříčlenných variací bez opakování
- a) desetkrát,
 - b) o 150.
- Určete původní počet prvků.
- 12) Určete počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi, která jsou sestavena z číslic 0, 2, 4, 6, 8.
- 13) Zmenší-li se počet prvků o 5, zmenší se počet variací druhé třídy z těchto prvků vytvořených 4,5krát. Kolik je prvků?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

POČÍTÁNÍ S FAKTORIÁLY

Řešený příklad 1:

Vypočtěte:

a) $\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$

b) $\frac{5! - 8! + 6!}{3!}$

c) $\frac{8!}{5! \cdot 3!}$

d) $\frac{7! + 6! + 5!}{8! - 7!}$

Řešení:

a) $\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{4-1}{4!} = \frac{3}{4!} = \frac{3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{8}$

b) $\frac{5! - 8! + 6!}{3!} = \frac{5! - 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5! + 6 \cdot 5!}{3!} = \frac{5! \cdot (1 - 8 \cdot 7 \cdot 6 + 6)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot (-324)}{3!} = \underline{\underline{-6480}}$

c) $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{56}}$

d) $\frac{7! + 6! + 5!}{8! - 7!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5! + 6 \cdot 5! + 5!}{8 \cdot 7! - 7!} = \frac{5! \cdot (42 + 6 + 1)}{7! \cdot (8 - 1)} = \frac{5! \cdot 49}{7 \cdot 6 \cdot 5! \cdot 7} = \frac{1}{6}$

Řešený příklad 2:

Vypočtěte (pro příslušná n):

a) $\frac{(n+1)!}{n!}$

b) $\frac{n!}{n \cdot (n-1)!}$

c) $\frac{(n-1)! \cdot (n+1)!}{(n!)^2}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$d) \frac{(n+1)!(2n)!}{2 \cdot n!(2n-1)!}$$

$$e) \frac{(n-3)!(n^2-1)}{(n-1)!}$$

Řešení:

$$a) \frac{(n+1)!}{n} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = \underline{\underline{n+1}}$$

$$b) \frac{n!}{n \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \underline{\underline{1}}$$

$$c) \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{(n-1)!(n+1) \cdot n!}{n! \cdot n!} = \frac{(n-1)!(n+1) \cdot n!}{n! \cdot n \cdot (n-1)!} = \underline{\underline{\frac{n+1}{n}}}$$

$$d) \frac{(n+1)!(2n)!}{2 \cdot n!(2n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n! \cdot (2n) \cdot (2n-1)!}{2 \cdot n! \cdot (2n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot 2n}{2} = n(n+1) = \underline{\underline{n^2 + n}}$$

$$e) \frac{(n-3)!(n^2-1)}{(n-1)!} = \frac{(n-3)!(n-1)(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)!} = \underline{\underline{\frac{n+1}{n-2}}}$$

Řešený příklad 3:

Zjednodušte výrazy:

$$a) \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$$

$$b) \frac{n^2-9}{(n+3)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$c) \frac{(n+2)!}{n!} - 2 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$$

Řešení:

$$a) \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!} - \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1) - n = n+1 - n = \underline{\underline{1}}$$

$$b) \frac{n^2-9}{(n+3)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n-3)(n+3)}{(n+3)(n+2)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n-3}{(n+2)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} =$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$= \frac{n-3}{(n+2)(n+1)!} + \frac{6}{(n+2)(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n-3+6-1 \cdot (n+2)}{(n+2)!} = \frac{n-3+6-n-2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{(n+2)!}{n!} - 2 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} - 2 \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \\ & = (n+2)(n+1) - 2(n+1)n + n(n-1) = n^2 + n + 2n + 2 - 2(n^2 + n) + n^2 - n = \\ & = n^2 + 3n + 2 - 2n^2 - 2n + n^2 - n = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Řešený příklad 4:

Řešte rovnice:

a) $30x! = (x+2)!$

b) $\frac{(x-4)! + (x-2)!}{(x-3)!} = 3$

c) $\frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{(x-1)!}{2!(x-3)!} = 4$

d) $\log(x+6)! - \log(x+5)! = 2 \log x$

Řešení:

a) $30x! = (x+2)!$

$$30x! = (x+2)(x+1)x! \quad / \cdot \frac{1}{x!}$$

$$30 = (x+2)(x+1)$$

$$30 = x^2 + x + 2x + 2$$

$$30 = x^2 + 3x + 2$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$(x+7)(x-4) = 0$$

$$x_1 = -7 \vee x_2 = 4$$

$$x = 4$$

určíme podmínku pro $x \Rightarrow x \in \mathbb{N}$

rovnici vydělíme $x!$ tj vynásobíme výrazem $\frac{1}{x!}$ a

odstraníme tak z rovnice výrazy s faktoriály (výrazem $x!$ můžeme dělit, protože výraz není nikdy roven nule)

pravou stranu rovnice roznásobíme

získáme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme například rozkladem na součin kořenových činitelů

určíme kořeny kvadratické rovnice

kořeny kvadratické rovnice

určíme správné řešení zadané rovnice (kořen x_1 nevyhovuje podmínce řešitelnosti rovnice)

Řešením rovnice je číslo $x = 4 \Rightarrow K = \{4\}$

zapišeme množinu kořenů rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$b) \frac{(x-4)! + (x-2)!}{(x-3)!} = 3$$

určíme podmínku pro $x \Rightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 4$

$$\frac{(x-4)! + (x-2)(x-3)(x-4)!}{(x-3)(x-4)!} = 3$$

levou stranu rovnice upravíme vhodným

rozkladem výrazů s faktoriály

$$\frac{(x-4)! [1 + (x-2)(x-3)]}{(x-3)(x-4)!} = 3$$

v čitateli vytkneme výraz s faktoriálem a

vykrátíme s výrazem ve jmenovateli; odstraníme tím faktoriály z rovnice

$$\frac{1 + (x-2)(x-3)}{(x-3)} = 3$$

rovnici vyřešíme známými metodami řešení

rovnice s neznámou ve jmenovateli

$$1 + (x-2)(x-3) = 3(x-3)$$

$$1 + x^2 - 3x - 2x + 6 = 3x - 9$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-4)^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 4$$

získáme kvadratickou rovnici

levou stranu rovnice upravíme na vzorec $(a+b)^2$

rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen, který vyhovuje podmínce řešitelnosti rovnice

Řešením rovnice je číslo $x = 4 \Rightarrow K = \{4\}$

zapišeme množinu kořenů rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

$$c) \frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{(x-1)!}{2!(x-3)!} = 4$$

určíme podmínku pro $x \Rightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 3$

$$\frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!} + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)!}{2(x-3)!} = 4$$

levou stranu rovnice upravíme vhodným

rozkladem výrazů s faktoriály

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} = 4$$

výrazy s faktoriály v jednotlivých zlomcích

vykrátíme a tím je z rovnice odstraníme

rovnici vyřešíme známými metodami řešení

$$\frac{x^2 - x}{2} + \frac{x^2 - 2x - x + 2}{2} = 4$$

$$x^2 - x + x^2 - 2x - x + 2 = 8$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 3 \vee x_2 = -1$$

$$x = 3$$

získáme kvadratickou rovnici, kterou řešíme rozkladem na součin kořenových činitelů
určíme kořeny kvadratické rovnice

kořeny kvadratické rovnice

určíme správné řešení zadané rovnice (kořen x_2 nevyhovuje podmínce řešitelnosti rovnice)



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešením rovnice je číslo $x = 3 \Rightarrow K = \{3\}$

zapišeme množinu kořenů rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

d) $\log(x+6)! - \log(x+5)! = 2 \log x$

určíme podmínku pro $x \Rightarrow x \in \mathbb{N}$

$$\log \frac{(x+6)!}{(x+5)!} = \log x^2$$

levou stranu rovnice upravíme užitím vět o

logaritmech (logaritmus podílu a logaritmus mocniny)

$$\frac{(x+6)!}{(x+5)!} = x^2$$

odstraníme logaritmy užitím věty o logaritmech o

stejných základech

$$\frac{(x+6)(x+5)!}{(x+5)!} = x^2$$

levou stranu rovnice upravíme rozkladem výrazu

s faktoriály a následným vykrácením stejných výrazů

$$x+6 = x^2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 3 \vee x_2 = -2$$

$$x = 3$$

získáme kvadratickou rovnici, kterou řešíme rozkladem na součin kořenových činitelů
určíme kořeny kvadratické rovnice

kořeny kvadratické rovnice

určíme správné řešení zadané rovnice (kořen x_2 nevyhovuje podmínce řešitelnosti rovnice)

Řešením rovnice je číslo $x = 3 \Rightarrow K = \{3\}$

zapišeme množinu kořenů rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list C

1) Vypočtěte:

a) $\frac{7!}{5!}$

b) $\frac{12!}{3!4!5!6!}$

c) $\frac{10!}{2!3!4!5!}$

..

d) $\frac{7!+5!}{5!}$

2) Vypočtěte (pro příslušná n):

a) $(n+1)! - n \cdot n!$

b) $\frac{n!}{(n-2)!}$

c) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

d) $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

e)
$$\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$$

f)
$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!(n^2-4)!}$$

3) Zjednodušte výrazy:

a)
$$\frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} - \frac{n^2-4}{(n+2)!}$$

b)
$$\frac{4-n^2}{(n+2)!} + \frac{n}{(n+1)!}$$

c)
$$\frac{2}{(n-1)!} - \frac{2n^2+n}{(n+1)!}$$

d)
$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{n!}$$

4) Řešte rovnice:

a)
$$\frac{(x-3)!+(x-1)!}{(n-2)!} = 3$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) $\frac{(x+6)!}{(x+4)!} + x^2 - 16x = 28$

c) $\log(x+1)! - \log x! = 1$

d) $(x!)^2 - 7x! + 6 = 0$

- 5) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z cifer 1, 2, 3, 4, 5 a které jsou větší než 40 000.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PERMUTACE BEZ OPAKOVÁNÍ

Motivační příklad 1:

V lavici má sedět 5 žáků označených písmeny A, B, C, D, E. Kolika způsoby si mohou sednout, jestliže:

- žák A má sedět na určeném konci lavice,
- žák A má sedět na jednom nebo druhém konci lavice,
- žáci A, C mají sedět vedle sebe,
- žák A má sedět na určeném konci lavice a žáci B, C mají sedět vedle sebe.

Řešení:

- žák A má sedět na určeném konci $\Rightarrow$ situaci symbolicky vyznačíme takto:

A

$\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou čtveřici (záleží na tom, jak se zbývající žáci vedle sebe posadí) $\Rightarrow$ tvoříme **variace 4. třídy ze 4 prvků bez opakování** $\Rightarrow$ je-li $n = k$, prvky se nesmí opakovat a záleží na jejich pořadí v n-tici $\Rightarrow$ vytváříme **permutace z 4 prvků bez opakování** $\Rightarrow$

$$V(4;4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Žáci se mohou posadit do pětímístné lavice, dle požadovaných podmínek, celkem 24 různými způsoby.

- žák A má sedět na jednom nebo druhém konci lavice $\Rightarrow$ situaci symbolicky vyznačíme takto:

A nebo A

$\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou čtveřici (záleží na tom, jak se ostatní žáci vedle sebe posadí) $\Rightarrow$ tvoříme **variace 4. třídy ze 4 prvků bez opakování**, které následně **započteme dvakrát** $\Rightarrow$ je-li $n = k$, prvky v n-tici se nesmí opakovat a záleží na jejich pořadí $\Rightarrow$ vytváříme tak **permutace z 4 prvků bez opakování** $\Rightarrow$

$$2 \cdot V(4;4) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot P(4) = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$$

Žáci se mohou posadit do pětímístné lavice, dle požadovaných podmínek, celkem 48 různými způsoby.

- žáci A, C mají sedět vedle sebe $\Rightarrow$ oba žáky A a C považujeme za nový prvek, který označíme Q $\Rightarrow$ k dispozici nyní máme prvky B, D, E a nový prvek Q $\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou čtveřici z těchto 4 prvků (B, D, E, Q) $\Rightarrow$ vytváříme **variace 4. třídy ze 4 prvků bez opakování** (žáci – prvky se nesmí ve vznikající čtveřici opakovat) $\Rightarrow n = k \Rightarrow$ tvoříme opět **permutace z 4 prvků bez opakování** $\Rightarrow$ situace vypadá takto:

. . . .

$$V(4;4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Protože si však mohou žáci A, C, tvořící prvek Q, mezi sebou přesednout tj. sednout si ve všech možných případech v pořadí A, C anebo ve všech možných případech v pořadí C, A $\Rightarrow$ mohou

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

si tedy sednout **dvěma různými způsoby** $\Rightarrow$ musíme získaný počet uspořádaných čtveřic **vynásobit dvěma**:

$$\text{Celkem: } 2 \cdot V(4;4) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot P(4) = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$$

Žáci se mohou posadit do pětímístné lavice, dle požadovaných podmínek, celkem 48 různými způsoby.

- d) žák A má sedět na určeném kraji lavice a žáci B, C mají sedět vedle sebe $\Rightarrow$ žáky B, C považujeme za nový prvek, který označme Q $\Rightarrow$ k dispozici nyní máme prvky A, D, E a Q $\Rightarrow$ žák A má sedět na určeném kraji $\Rightarrow$ situaci graficky vyznačíme takto:

A . . . (na prázdná místa máme možnost posadit prvky D, E, Q)

$\Rightarrow$ vytváříme již uspořádanou trojici z prvků D, E, Q $\Rightarrow$ v trojici záleží na pořadí prvků a prvky se nemohou opakovat $\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou trojici ze tří prvků bez opakování $\Rightarrow$ **variace 3. třídy ze 3 prvků bez opakování** ($n = k \Rightarrow$ **permutace ze 3 prvků bez opakování**)

$$V(3;3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

V takto vzniklých trojicích se však ve všech možných případech mohou žáci B, C, tvořící prvek Q, posadit v opačném pořadí tj. C, B $\Rightarrow$ žáci B, C si tedy ve všech možných případech mohou sednout **dvěma různými způsoby** $\Rightarrow$ získaný počet uspořádaných trojic musíme **vynásobit dvěma**:

$$\text{Celkem: } 2 \cdot V(3;3) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot P(3) = 2 \cdot 3! = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

Žáci se mohou posadit do pětímístné lavice, dle požadovaných podmínek, celkem 12 různými způsoby.

Teorie

Permutace z n-prvků bez opakování je každá variace n-té třídy z těchto n-prvků bez opakování.

(uspořádané n-tice, které vytváříme, se liší pouze pořadím prvků v n-tici tj. $k = n$)

Symbolický zápis: **P(n)**

Pro počet všech permutací z n-prvků bez opakování platí vzorec:

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

permutace z n-prvků bez opakování

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$P(n) = V(n; n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{0!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Řešený příklad 1:

Kolika způsoby lze vedle sebe uložit šest různých knih?

Řešení:

Ze zadání úlohy plyne, že šest různých knih ($n = 6$) potřebujeme uložit vedle sebe na šest různých míst ($k = 6$) $\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou šestici ze šesti prvků (knihy jsou různé, tj. záleží na jejich umístění a nemohou se opakovat) $\Rightarrow n = 6 = k$, vytváříme **permutace z 6 prvků bez opakování**.

$$P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Knihy lze vedle sebe uložit 720 různými způsoby.

Řešený příklad 2:

Kolika způsoby lze posadit čtyři hosty na čtyři křesla?

Řešení:

$n = 4$ (počet hostů) a $k = 4$ (počet křesel) $\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou čtveřici ze čtyř prvků bez opakování (hosté se nemohou v jedné čtveřici opakovat a záleží, kdo si na jaké křeslo sedne) $\Rightarrow$ vytváříme **permutace ze 4 prvků bez opakování**.

$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Čtyři hosté si na čtyři různá křesla mohou sednout 24 různými způsoby.

Řešený příklad 3:

Určete počet pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 1, 3, 4, 7.

Řešení:

počet prvků: $n = 5$ (0, 1, 3, 4, 7);

vytváříme uspořádanou pětici $\Rightarrow k = 5$ (pětimístné přirozené číslo)

$\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou pětici z pěti prvků bez opakování (čísllice se v zápisu čísla nemohou opakovat, protože v zápisu čísla musí být použita každá z uvedených číslic) $\Rightarrow$ vytváříme **permutace z 5 prvků bez opakování**.

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Pozor! Mezi vzniklými přirozenými čísly jsou však i takové čísla, která začínají cifrou 0, tj. čísla 0... $\Rightarrow$ takováto čísla však nejsou pěticiferná, ale čtyřciferná $\Rightarrow$ proto musíme od uvedeného počtu odečíst



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

všechna takto vzniklá čísla (musíme odečíst uspořádané čtveřice vytvořené ze čtyř prvků 1, 3, 4, 7), kterých je $P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Celkem: $P(5) - P(4) = 5! - 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 - 24 = 96$

Z daných číslíc lze vytvořit 96 pěticefemých přirozených požadovaných tvarů.

Řešený příklad 4:

Kolika způsoby může stát v zástupu za sebou pět vojáků A, B, C, D, E tak, aby:

- voják A byl první a voják E poslední,
- vojáci C, D, E stáli za sebou v libovolném pořadí.

Řešení:

- voják A byl první a voják E poslední $\Rightarrow$ situace: **A . . . E** $\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou trojici ze tří prvků (B, C, D),; prvky se nemohou opakovat $\Rightarrow$ vytváříme **permutace ze 3 prvků bez opakování**

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Za daných podmínek mohou vojáci stát za sebou 6 různými způsoby.

- vojáci C, D, E za sebou v libovolném pořadí $\Rightarrow$ vojáci C, D, E musí stát při sobě a proto je budeme považovat za nový prvek Q $\Rightarrow$ vytváříme uspořádanou trojici ze tří prvků A, B, Q $\Rightarrow$ situace: . . . $\Rightarrow$ vytváříme **permutace ze 3 prvků bez opakování**
 $P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Jestliže však vojáci C, D, E mají stát za sebou v libovolném pořadí, vypočteme, kolikrát se mohou ti vojáci mezi sebou zaměnit $\Rightarrow$ vytváříme další **permutace ze 3 prvků (C, D, E) bez opakování**

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$\Rightarrow$ vojáci C, D, E se mezi sebou mohou šestkrát zaměnit $\Rightarrow$ v každé vzniklé uspořádané trojici A, B, Q, můžeme ještě šestkrát zaměnit pořadí prvků tvořících prvek Q (tj. prvků C, D, E)

Celkový počet možností seřazení vojáků dle zadaných podmínek je pak roven součinu:

$$P(3) \cdot P(3) = 3! \cdot 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 6 = 36$$

Vojáci se do zástupu mohou postavit celkem 36 různými způsoby.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešený příklad 5:

Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací 12krát. Kolik je prvků?

Řešení:

Na základě zadání sestavíme symbolickou rovnici:

$$P(n+2) = 12 \cdot P(n) \quad (n \in N)$$

$$(n+2)! = 12 \cdot n!$$

$$(n+2) \cdot (n+1) \cdot n! = 12 \cdot n!$$

$$(n+2) \cdot (n+1) = 12$$

$$n^2 + n + 2n + 2 = 12$$

$$n^2 + 3n - 10 = 0$$

$$(n+5) \cdot (n-2) = 0$$

$$n_1 = -5 \vee n_2 = 2$$

$$n = 2$$

symbolický zápis převedeme na matematický tvar
výrazy s faktoriály upravíme (rozložíme větší číslo
pomocí čísla menšího)
rovnici vydělíme výrazem $n!$
rovnici dále upravíme a zjednodušíme

získanou kvadratickou rovnici řešíme rozkladem
na součin kořenových činitelů
vypočteme kořeny kvadratické rovnice
určíme správné řešení rovnice (kořen: -5)
nevyhovuje podmínce rovnice)

Řešením rovnice je číslo $n = 2 \Rightarrow K = \{2\}$

zapíšeme množinu kořenů rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list C

- 1) Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 2, 4, 6, 8, 9.
- 2) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z cifer 1, 2, 3, 4, 5 a které jsou větší než 40 000.
- 3) Kolika způsoby se na pětímístné lavici může posadit pět chlapců, z nichž dva chtějí sedět vedle sebe.
- 4) V množině N řešte rovnici: $(x+1)! = 110 \cdot (x-1)!$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 5) Určete počet všech devítimístných:
- telefonních,
 - přirozených,
- čísel, v jejichž zápisu je každá z deseti číslic kromě devítky.
- 6) Kolika způsoby může m chlapců a n dívek nastoupit do zástupu tak, aby:
- nejdříve stály všechny dívky a pak všichni chlapci,
 - mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka ani mezi žádnými dvěma dívkami nebyl žádný chlapec.
- 7) Určete počet prvků tak, aby:
- při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací zvětšil 56krát,
 - při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací zmenšil 20krát.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VARIACE S OPAKOVÁNÍM

Teorie:

Variace k-té třídy z n-prvků s opakováním, dané základní n-prvkové množiny ($k, n \in \mathbb{N}$), je každá **uspořádaná k-tice** sestavená pouze z těchto n-prvků.

(záleží na pořadí prvků a dané prvky se mohou opakovat)

Symbolický zápis: $V'(k; n)$ nebo $V'_k(n)$

Pro počet všech variací k-té třídy z n-prvků s opakováním platí vzorec:

$$V'(k; n) = n^k$$

↑ ↑ ↑
variace k-té třídy z n-prvků s opakováním

Např.:

Je dána množina $M = \{a; b; c\}$. Všechny variace 2. třídy z těchto 3 prvků s opakováním (tj. všechny uspořádané dvojice) jsou:

[a;a], [b;a], [c;a],
[a;b], [b;b], [b;c],
[a;c], [b;c], [c;c].

Dané prvky se mohou opakovat a záleží na jejich uspořádání (pořadí).
Celkem lze tedy vytvořit $V'(2; 3) = 3^2 = 9$ **uspořádaných dvojic**.

Důkaz vzorce:

Vzorec pro výpočet $V'(k; n)$ lze získat užitím kombinatorického pravidla součinu. Pro výběr každého členu uspořádané k-tice sestavené pouze z daných n-prvků máme právě n-možností, a to nezávisle na tom, které prvky byly vybrány pro členy předcházející.

Existuje tedy právě $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-krát}} = n^k$ uspořádaných k-tic sestavených z daných n-prvků tj. $V'(k; n) = n^k$.

Řešený příklad 1:

Kolik různých telefonních stanic lze zapojit na telefonní centrálu, jestliže jsou všechna čísla stanic pěticiferná? Kolik může být těchto stanic, předpokládáme-li, že číslo nemůže začínat číslicí 0?



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

Čísla telefonních stanic chápeme jako uspořádané pětice tvořené deseti číslicemi (0, 1; 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), v nichž se mohou číslice opakovat $\Rightarrow$ vytváříme **variace 5. třídy z 10 prvků s opakováním** $\Rightarrow$
 $V'(5;10) = 10^5 = 100\ 000$.

Na centrálu lze zapojit 100 000 telefonních stanic.

Pokud telefonní číslo nesmí začínat číslicí 0. Pak počet těchto stanic, vypočteme ze vztahu:
 $V'(5;10) - V'(4;10) = 10^5 - 10^4 = 90\ 000$.

↑
počet pětímístných telefonních čísel, začínajících číslicí 0 tj. situace: **0**

Na centrálu lze zapojit 90 000 telefonních stanic.

Řešený příklad 2:

V jistém státě je státní poznávací značka osobního automobilu tvořena uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy jsou písmena a další čtyři členy jsou číslice. Určete, kolik těchto poznávacích značek lze vytvořit, máme-li k dispozici 26 písmen.

Řešení:

První část SPZ je tvořena uspořádanou trojicí sestavenou z 26 písmen, které se mohou v zápisu opakovat (např.: AAB, ACA, AAA, apod.). Počet všech takovýchto trojic vypočteme podle vztahu
 $V'(3, 26) = 26^3 = 17\ 576$ uspořádaných trojic.

Druhá část SPZ je tvořena uspořádanou čtveřicí sestavenou z 10 cifer (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), které se také mohou opakovat. Tj. $V'(4;10) = 10^4 = 10\ 000$.

Podle kombinatorického pravidla součinu existuje celkem

$$V'(3;26) \cdot V'(4;10) = 26^3 \cdot 10^4 = 17576 \cdot 10000 = 175760000 \text{ státních poznávacích značek.}$$

Podle uvedených pravidel lze sestavit celkem 175 760 000 SPZ.

Řešený příklad 3:

Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel sestavených pouze z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Řešení:

$k = 4$ (vytváříme uspořádanou čtveřici)
 $n = 6$ (k dispozici máme šest číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6)

Ve vytvářené čtveřici se číslice mohou opakovat a záleží na jejich pořadí.

K výpočtu použijeme vztah: $V'(4;6) = 6^4 = 1296$

Celkem lze takto vytvořit 1 296 přirozených čísel.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešený příklad 4:

Jsou dány cifry 1, 2, 3. Kolik různých:

- dvojciferných
- pěticiferných
- k-ciferných přirozených čísel lze pomocí těchto cifer zapsat?

Řešení:

Jakékoliv přirozené číslo můžeme považovat za uspořádanou k-tici, protože v ní záleží na pořadí a jednotlivé cifry se v dekadickém zápisu čísla mohou opakovat.

- Vytváříme-li z uvedených cifer dvojciferné přirozené číslo, pak vytváříme uspořádanou dvojici, v níž se jednotlivé cifry mohou opakovat a záleží na jejich pořadí $\Rightarrow$ **variace 2. třídy z 3 prvků s opakováním** $\Rightarrow V(2;3) = 3^2 = 9$

Z uvedených cifer lze vytvořit 9 přirozených čísel.

- Vytváříme-li z uvedených cifer pěticiferné přirozené číslo, pak vytváříme uspořádanou pěticí, v níž se jednotlivé cifry mohou opakovat a záleží na jejich pořadí $\Rightarrow$ **variace 5. třídy z 3 prvků s opakováním** $\Rightarrow V(5;3) = 3^5 = 243$

Z uvedených cifer lze vytvořit 243 přirozených čísel.

- Vytváříme-li z uvedených cifer k-ciferné přirozené číslo, pak vytváříme uspořádanou k-tici, v níž se jednotlivé cifry mohou opakovat a záleží na jejich pořadí $\Rightarrow$ **variace k-té třídy z 3 prvků s opakováním** $\Rightarrow V(k;3) = 3^k$

Z uvedených cifer lze vytvořit 3^k přirozených čísel.

Řešený příklad 5:

Pro kolik prvků je počet variací 3. třídy bez opakování k počtu variací téže třídy s opakováním v poměru 21 : 32?

Řešení:

Na základě zadání sestavíme symbolickou rovnici:

$$\frac{V(3;n)}{V'(3;n)} = \frac{21}{32} \quad (n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3)$$

symbolický zápis převedeme na matematický tvar

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3} = \frac{21}{32}$$

výraz na levé straně rovnice upravíme

$$\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n^2} = \frac{21}{32}$$

odstraníme zlomky

$$32 \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 21n^2$$

rovnici vyřešíme

$$32(n^2 - 3n + 2) = 21n^2$$

$$32n^2 - 96n + 64 = 21n^2$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$11n^2 - 96n + 64 = 0$$

kvadratická rovnice; vypočteme diskriminant a kořeny kvadratické rovnice

$$D = 6400$$

$$n_1 = 8$$

kořen n_2 nemá smysl

$$n_2 = \frac{8}{11}$$

Řešením rovnice je číslo $n = 8 \Rightarrow K = \{8\}$
Počet prvků je 8.

zapišeme množinu kořenů rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.



PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

Permutace z n-prvků s opakováním je každá uspořádaná n-tice sestavená pouze z těchto prvků tak, že prvek a_1 se opakuje právě p_1 -krát, prvek a_2 se opakuje právě p_2 -krát atd., až prvek a_k se opakuje právě p_k -krát, přičemž $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$.

Symbolický zápis: $P'(p_1, p_2, \dots, p_k)$

Pro počet všech permutací z n-prvků s opakováním platí vzorec:

$$P'(p_1, p_2, \dots, p_k) = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_k)!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \dots \cdot p_k!} = \frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \dots \cdot p_k!}$$

Řešený příklad 1:

Kolika způsoby je možno rozdělit 9 brigádníků na 3 pracoviště, jestliže na prvním pracovišti mají být čtyři brigádníci, na druhém pracovišti dva brigádníci a zbytek jich na třetím pracovišti.

Řešení:

9 brigádníků můžeme umístit na 9 míst celkem 9! různými způsoby. Jestliže první čtyři pracovníky umístíme na první pracoviště a vzájemně je budeme mezi sebou „prohazovat“, ale stále tutéž čtveřici pracovníků ponecháme na prvním pracovišti, musíme celkový počet rozmístění pracovníků dělit 4!. Protože však totéž můžeme provést s další dvojicí a trojicí pracovníků, musíme celkový počet permutací dělit součinem $4! \cdot 2! \cdot 3! \Rightarrow$ **permutace s opakováním z 9 prvků**

$$P'(4,2,3) = \frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1260$$

Devět pracovníků lze rozdělit do tří pracovišť celkem **1260 různými způsoby**.

Řešený příklad 2:

Šesticiferné heslo uzávěru trezoru je vytvořeno z týchž cifer, jako je číslo 220096. Kolik existuje možností nalezení správného hesla?

Řešení:

V hesle trezoru se vyskytují dvě dvojky, dvě nuly, jedna devítka a jedna šestka. Vytváříme uspořádanou šestici ze šesti čísel, v nichž záleží na pořadí. Dané prvky se mohou opakovat $\Rightarrow$ **permutace s opakováním z 6 prvků** (Protože se však dvojky mohou na stejných pozicích vzájemně prohodit a stejně tak nuly, dělíme 6! výrazem $2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!$ a přitom se bude jednat o tutéž uspořádanou šestici.)

$$P'(2,2,1,1) = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 180$$

Celkem existuje **180 možností nalezení hesla**.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Použitá literatura:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

O. Petránek, E. Čalda, P. Hebák: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 4. část, Prometheus 2008

M. Hudcová, L. Kubičková: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium, Prometheus 2004

E. Čalda, V. Dupač: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika, Prometheus 2006

I. Dušek: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN 1988

F. Janeček: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus 1995

P. Čermák, P. Červinková: Odmaturuj z matematiky, Didaktis 2002