



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	TŘETÍ	MGR. JÜTTNEROVÁ	15. 9. 2012
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
KOMBINACE, POČÍTÁNÍ S KOMBINAČNÍM ČÍSLY			

DEFINICE FAKTORIÁLU

- Při výpočtech úloh z kombinatoriky se používá **$n!$**

Tento symbol nazýváme **n faktoriál** a je pro přirozená čísla definován takto:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pro $n = 0$ je definován:

$$0! = 1$$

- Příklady:

$$1! = 1$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

KOMBINACE k – TÉ TŘÍDY Z n PRVKŮ VYTVOŘENÝCH BEZ OPAKOVÁNÍ

- Je neuspořádaná k – tice (tj. k -tice, v níž nezáleží na pořadí prvků) sestavená pouze z těchto n prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Příklad:

Je dána množina $M = \{a, b, c, d\}$. Všechny tříčlenné kombinace vytvořené z těchto prvků jsou:

$$\{a, b, c\}; \{a, b, d\}; \{a, c, d\}; \{b, c, d\}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Označení: $C_k(n)$ nebo $C(k;n)$; $k; n \in N_0$; $0 \leq k \leq n$
- Pro počet všech kombinací k – té třídy z n – prvků bez opakování platí vztah:

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Čteme:

kombinace k – té třídy
z n prvků bez opakování

kombinační číslo
„ n nad k “

n faktoriál lomeno $(n - k)$
faktoriál krát k faktoriál

- Pro počet všech kombinací k – té třídy z n – prvků bez opakování platí:

$$C_1(n) = \binom{n}{1} = n$$

$$C_0(n) = \binom{n}{0} = 1$$

$$C_n(n) = \binom{n}{n} = 1$$

Příklady:

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 5$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1}$$

$$\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 1}$$

- Při počítání s kombinačními čísly se často využívá této vlastnosti:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Například:

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1}$$

Řešené příklady

1) Kolika způsoby může shromáždění 30 lidí zvolit ze svého středu tří členný výbor?

Řešení: Vytvoříme neuspořádané trojice, tj. $k = 3$, $n = 30$. Dané prvky se v trojici neopakují a nezáleží na jejich pořadí $\Rightarrow$ jde o kombinace třetí třídy z třiceti prvků bez opakování.

$$C_3(30) = \binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060$$

Shromáždění 30 lidí může tříčlenný výbor zvolit 4060 způsoby.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 2) Na volejbalovém turnaji hraje 6 družstev systémem každý s každým. Určete počet všech utkání.

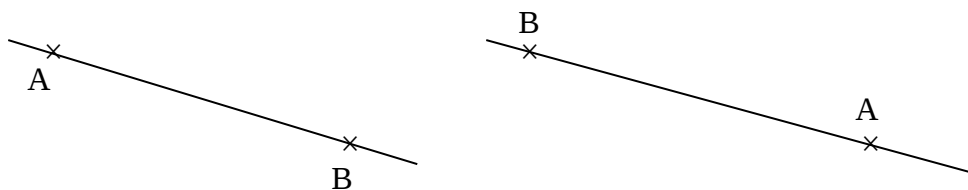
Řešení: Vytvoříme dvojice z daných šesti družstev, tj. $k = 2$, $n = 6$, v nichž nezáleží na pořadí – zápas družstva A s družstvem B je totéž jako zápas družstva B s družstvem A. V těchto dvojicích se každé družstvo vyskytuje nejvýše jednou $\Rightarrow$ jde o kombinace druhé třídy z šesti prvků bez opakování.

$$C_2(6) = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Celkem se musí odehrát 15 utkání.

- 3) Určete, kolik přímek je určeno deseti body, jestliže:
a) žádné tři z nich neleží na přímce

Řešení: Každá přímka je určena dvěma různými body, na jejichž uspořádání nezáleží:



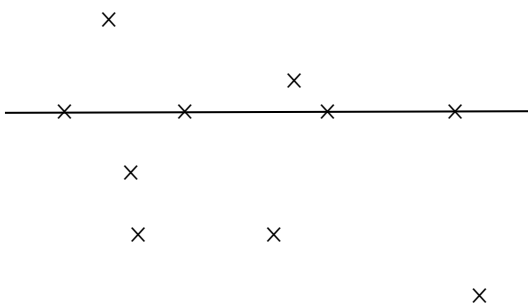
$\Rightarrow$ vytvoříme neuspořádané dvojice, tj. $k = 2$, $n = 10$.

$$C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

V tomto případě je deseti body určeno 45 přímek.

- b) právě čtyři z nich leží na přímce

Řešení:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$C_2(10) - C_2(4) + 1 = \binom{10}{2} - \binom{4}{2} + 1 = 45 - \frac{4 \cdot 3}{2} + 1 = 40$$

počet všech přímek
určených deseti
body

počet přímek
tvořených 2 body
ležících na přímce

počet přímek
tvořených 4 body na
přímce

V tomto případě je deseti body určeno 40 přímek.

- 4) ***Ve třídě je 19 chlapců a 12 dívek. Určete, kolika způsoby lze z nich vybrat tříčlennou skupinu, v níž jsou:***

a) ***pouze chlapci***

Řešení:

$$\binom{19}{3} \cdot \binom{12}{0} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 969 \text{ způsobů}$$

vybíráme 3 chlapce z 19

současně

žádnou dívku z 12

b) ***pouze dívky***

Řešení:

$$\binom{19}{0} \cdot \binom{12}{3} = 1 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220 \text{ způsobů}$$

c) ***dva chlapci a jedna dívka***

Řešení:

$$\binom{19}{2} \cdot \binom{12}{1} = \frac{19 \cdot 18}{2 \cdot 1} \cdot 12 = 2052 \text{ způsobů}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

d) *aspoň dvě dívky*

Řešení:

Aspoň dvě dívky znamená, že vybíráme dvě dívky nebo tři dívky

$$\binom{19}{1} \cdot \binom{12}{2} + \binom{19}{0} \cdot \binom{12}{3} = 19 \cdot \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} + 1 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1474 \text{ způsobů}$$

1 chlapec z 19 a
současně 2 dívky
z 12

nebo

žádný chlapec
z 19 a současně
3 dívky z 12

5) *Určete všechna $n \in \mathbb{N}$; pro něž platí $C_2(n) = 28$.*

Řešení:

$$C_2(n) = 28$$

$$\binom{n}{2} = 28$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 28$$

$$n^2 - n = 56$$

$$n^2 - n - 56 = 0$$

$$(n-8) \cdot (n+7) = 0$$

... kvadratickou rovnici řešíme rozkladem kvadratického trojčlenu na součin

$$n_1 = 8 \in \mathbb{N}$$

$$n_2 = -7 \notin \mathbb{N}$$

Zadání vyhovuje kořen $n = 8$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 6) Zmenší-li se počet prvků o 4, zmenší se počet kombinací druhé třídy z těchto prvků třikrát. Kolik je prvků?

Řešení:

$$C_2(n-4) = \frac{C_2(n)}{3} \quad \Rightarrow \text{podmínka: } n > 4; n \in N$$

$$3 \cdot C_2(n-4) = C_2(n)$$

$$3 \cdot \binom{n-4}{2} = \binom{n}{2}$$

$$3 \cdot \frac{(n-4) \cdot (n-5)}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \quad / :2$$

$$3 \cdot (n^2 - 4n - 5n + 20) = n^2 - n$$

$$3 \cdot (n^2 - 9n + 20) = n^2 - n$$

$$3n^2 - 27n + 60 = n^2 - n$$

$$2n^2 - 26n + 60 = 0 \quad / :2$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0$$

$$(n-10) \cdot (n-3) = 0$$



$$n_1 = 10$$

$$n_2 = 3 \dots \text{ tento kořen nevyhovuje podmínce}$$

Počet prvků je 10.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 1

KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

Řešte následující příklady:

- 1) Basketbalové družstvo tvoří pět hráčů. Vypočtete, kolik možností má pro sestavení družstva trenér, má-li k dispozici 12 hráčů.
- 2) Při setkání si přátelé podali každý s každým ruku. Počet těchto podání byl 78. Určete, kolik bylo přátel.
- 3) Zjistěte, kolik kružnic je určeno deseti body, jestliže žádné tři z těchto bodů neleží na přímce a žádné čtyři na kružnici.
- 4) Ze sedmi mužů a čtyř žen se má vybrat šestičlenná skupina, v níž jsou alespoň tři ženy. Vypočtete, kolika způsoby to lze provést.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 3

KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- 8) V kůlně je sedm bílých a 6 červených kuliček. Při kolika pokusech vybrání 4 kuliček budou mezi nimi:

a) právě dvě bílé

b) aspoň dvě bílé

- 9) Určete počet úhlopříček v konvexním n – úhelníku.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 4

KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- 10) Na kružnici jsou dány body $A_1, A_2, \dots, A_{12}$. Indexy bodů určují jejich pořadí. Určete:
- a) počet tětiv určených těmito body
 - b) počet trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech
 - c) počet konvexních čtyřúhelníků s vrcholy v těchto bodech
- 11) Zvětší-li se počet prvků o 4, zvětší se počet kombinací druhé třídy z těchto prvků vytvořených o 30. Kolik je prvků?



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

- 1) V oddíle stolního tenisu trénuje 10 chlapců a 5 děvčat. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat soutěžní družstvo skládající se ze 4 chlapců a 2 dívek?
- 2) Určete, kolika způsoby lze ze sady dvanácti různobarevných pastelek, mezi nimiž je jedna černá, vybrat tři tak, aby:
 - a) jedna z nich byla černá
 - b) ani jedna nebyla černá
- 3) Ve třídě je 30 žáků, z toho 12 děvčat. Kolika způsoby můžeme z této třídy sestavit takové sedmičlenné družstvo, aby v něm byla 3 děvčata.
- 4) V rotě je 5 důstojníků a 50 vojáků. Kolika způsoby lze sestavit službu, která se skládá z jednoho důstojníka a tří vojáků?
- 5) Kolika způsoby lze osvětlit místnost, v níž je pět různých lamp a každá má samostatný vypínač?
- 6) Na brigádě s celodenním režimem bylo 15 chlapců a 20 děvčat. Kolik různých služeb je možno určit, jestliže se služba skládá ze dvou chlapců a jednoho děvčete?
- 7) Je dáno 10 různých bodů v prostoru, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce a žádné čtyři v jedné rovině. Kolik rovin lze těmito body určit? Kolik rovin lze těmito body určit, jestliže čtyři z nich leží v jedné rovině?
- 8) Jízdenky dopravního podniku mají devět očíslovaných okének. Kolika způsoby lze nastavit kód označovacího strojeku, jestliže se děrují tři nebo čtyři okénka?
- 9) Kolik prvků je třeba mít, aby z nich bylo možno vytvořit šestkrát více kombinací 4. třídy než kombinací 2. třídy?
- 10) Zmenší-li se počet prvků o 5, zmenší se počet kombinací druhé třídy z těchto prvků vytvořených o 25. Kolik je prvků?



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury

Výukové materiály a některé úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

E. CALDA, V. DUPAČ: Matematika pro gymnázia Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Prometheus, 2006

O. PETRÁNEK, E. CALDA, P. HEBÁK: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 4. část. Prometheus 2006

M. HUDCOVÁ, L. KUBIČKOVÁ: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium. Prometheus 2010

P. ČERMÁK, P. ČERVINKOVÁ: Odmaturuj z matematiky 1. Didaktis 2007

F. JIRÁSEK, K. BRANIŠ, S. HORÁK, M. VACEK: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU, 2. Část.