



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	TŘETÍ	MGR. JÜTTNEROVÁ	30. 3. 2014
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST A JEJÍ UŽITÍ			

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

Definice:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická právě tehdy, když existuje takové číslo $q \in R$; že pro každé $n \in N$ platí:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

q ... kvocient

Řešený příklad 1:

Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti, pro niž platí: $a_1 = 2$; $q = -\frac{1}{2}$

Řešení:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = -1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Každý člen geometrické posloupnosti počínaje druhým získáme tak, že předcházející člen vynásobíme kvocientem.

Pro kvocient platí: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vztah pro n-tý člen:

Odvození:

Je-li první člen a_1 a kvocient q , pak pro další členy geometrické posloupnosti platí:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \cdot q = a_1 \cdot q^4$$

.

.

.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Vztah, který platí mezi dvěma členy geometrické posloupnosti:

Odvození:

$$\begin{array}{l} a_r = a_1 \cdot q^{r-1} \\ a_s = a_1 \cdot q^{s-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad a_1 = \frac{a_s}{q^{s-1}} \quad \dots \text{dosadíme do vztahu pro } r\text{-tý člen}$$

↓

$$a_r = \frac{a_s}{q^{s-1}} \cdot q^{r-1}$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti:

Odvození:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad / \cdot q$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad / \cdot (-1)$$

$$q \cdot s_n = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \dots + a_n q$$

$$-s_n = -a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n$$

$$q \cdot s_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n q$$

$$-s_n = -a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n$$

} $\oplus$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$q \cdot s_n - s_n = -a_1 + a_n q$$

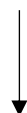
$$s_n(q-1) = -a_1 + a_n q \quad \dots \text{do tohoto vztahu dosadíme } a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$



$$s_n(q-1) = -a_1 + a_1 \cdot \underbrace{q^{n-1} \cdot q}_{q^n}$$

$$s_n(q-1) = -a_1 + a_1 \cdot q^n$$

$$s_n(q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1) \quad / : (q-1)$$



$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad q \neq 1$$

Je-li $q = 1$, pak:

1. člen je a_1

2. člen je a_1

3. člen je a_1

.

.

.

n-tý člen je a_1

Pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1$$

$$s_n = n \cdot a_1$$

Geometrický průměr:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$$

Pro $n \geq 2$ platí:

$$|a_n| = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

Každý člen geometrické posloupnosti, počínaje druhým členem, je geometrickým průměrem sousedních členů.

Řešený příklad 2:

Ukažte, že čísla $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ jsou tři za sebou jdoucí členy geometrické posloupnosti.

Řešení:

$$a_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{3}$$

$$a_3 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{3}$$

Podíl 3. a 2. členu je stejný jako podíl 2. a 1. členu, jde tedy o členy geometrické posloupnosti.

Řešený příklad 3:

Určete velikost čísla x ostrého úhlu, jsou-li $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\cos x}$ tři za sebou jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete kvocient.

Řešení:

$$a_1 = \sin x$$

$$a_2 = \operatorname{tg} x$$

$$a_3 = \frac{1}{\cos x}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\operatorname{tg} x} \cdot \sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

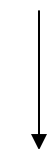
$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

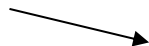
$$\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0$$



$$\operatorname{tg} x = 0$$

$$x = k \cdot \pi$$

$$\underline{x = 0}$$



$$\operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{\pi}{4}}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$q = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Řešený příklad 4:

Určete geometrickou posloupnost, v níž platí:

$$a_1 + a_2 = 4$$

$$\underline{a_2 - a_4 = -24}$$

Řešení:

$$a_1 + a_2 = 4$$

$$\underline{a_2 - a_4 = -24}$$

$$a_1 + a_1 q = 4$$

$$\underline{a_1 q - a_1 q^3 = -24}$$

$$a_1(1 + q) = 4$$

$$\underline{a_1 q(1 - q^2) = -24}$$

$$\frac{4}{1+q} \cdot q \cdot (1-q) = -24$$

$$4q \cdot (1 - q) = -24 \quad / : 4$$

$$q - q^2 = -6$$

$$-q^2 + q + 6 = 0$$

$$q^2 - q - 6 = 0$$

... tuto soustavu upravíme na soustavu rovnic s neznámými a_1 a q

$$\rightarrow a_1 = \frac{4}{1+q}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$(q-3) \cdot (q+2) = 0$$

$$\underline{q = 3}$$

nebo

$$\underline{q = -2}$$

$$a_1 = \frac{4}{4} = 1 = 3^0$$

$$a_2 = 1 \cdot 3 = 3 = 3^1$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 = 9 = 3^2$$

$$a_4 = 9 \cdot 3 = 27 = 3^3$$

.

.

.

$$a_n = 3^{n-1}$$

$$\left(3^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

$$a_1 = \frac{4}{-1} = -4 = -1 \cdot 2^2$$

$$a_2 = -4 \cdot (-2) = 8 = 2^3$$

$$a_3 = 8 \cdot (-2) = -16 = -1 \cdot 2^4$$

$$a_4 = -16 \cdot (-2) = 32 = 2^5$$

.

.

.

$$a_n = (-1)^n 2^{n+1}$$

$$\left((-1)^n \cdot 2^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Řešený příklad 5:

Určete součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti, v níž platí:

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = 4$$

Řešení:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$$

$$s_{10} = -2 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = \frac{2}{3} \cdot (1024 - 1) = 682$$

PRACOVNÍ LIST 1

Příklad 1

Určete první čtyři členy geometrické posloupnosti, je-li:

a) $a_1 = -9$, $q = \frac{1}{3}$

b) $a_4 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{6}$

Příklad 2

V geometrické posloupnosti je dáno:

$$a_{10} = \frac{1}{16}, q = -2$$

Určete a_{15} .**Příklad 3**

V geometrické posloupnosti je dáno:

$$a_{27} = \frac{1}{128}, a_{22} = \frac{1}{4}$$

Určete kvocient.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 2

Příklad 4

Přičteme-li k číslům 2; 7 a 17 totéž číslo, vzniknou první tři členy geometrické posloupnosti.

a) Určete tato čísla.

b) Určete součet prvních deseti členů této posloupnosti.

Příklad 5

V geometrické posloupnosti platí:

$$a_1 = 6144$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 48$$

Určete počet členů a součet všech těchto členů posloupnosti.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 3

Příklad 6

Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila členy geometrické posloupnosti a aby součet vložených členů byl 630.

Příklad 7

V geometrické posloupnosti platí:

$$a_1 + a_4 = 56$$

$$a_2 + a_3 = 24$$

Určete první člen a kvocient.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 4

Příklad 8

V geometrické posloupnosti platí:

$$a_3 - a_1 + 16 = 0$$

$$a_4 - a_2 + 48 = 0$$

Určete první člen a kvocient.

Příklad 9

V geometrické posloupnosti platí:

$$a_1 - a_3 = -1,5$$

$$a_2 + a_1 = 1,5$$

Určete součet prvních pěti členů této posloupnosti.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST UŽITÍ GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

Příklad 1

Kvádr, jehož velikosti hran tvoří geometrickou posloupnost, má povrch 78 m^2 . Součet délek hran procházejících jedním jeho vrcholem je 13 m. Vypočítejte objem kvádru.

Příklad 2

Poločas rozpadu rádia je asi 20 minut. Jaké množství rádia zbyde za 4 hodiny? Původní množství rádia bylo 1 mg.

Příklad 3

Určete poločas rozpadu bismutu, jestliže hmotnost bismutu z původní hmotnosti 32 g byla za 242 minut pouze 2 g.

VÝUKOVÝ LIST SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

Při pravidelném poklesu nebo růstu určité hodnoty o p procent využíváme geometrické posloupnosti.

a_0 – původní hodnota (vklad)

a_n – hodnota po n obdobích

n – počet období

Odvození vztahu:

$$a_1 = a_0 + \frac{p}{100} \cdot a_0$$

$$a_1 = a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$a_2 = a_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

$$a_2 = a_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

$$a_3 = a_2 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3$$

.

.

.

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$



r ... **úročitel**

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n \quad \dots \text{pravidelný vzrůst}$$

$$a_n = a_0 \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n \quad \dots \text{pravidelný pokles}$$

$$a_n = a_0 \cdot r^n$$

$$r = 1 \pm \frac{p}{100}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 1 SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

Příklad 1

Na jakou částku vzroste vklad 25 000 Kč za 10 let při 4 % složeném úrokování?

Příklad 2

Počet obyvatel vzrostl za 10 let z 25 000 na 33 600. Jaký byl roční přírůstek v procentech?

Příklad 3

Za jakou dobu se vklad vložený do penzijního ústavu při 2 % úroku zdvojnásobí?

Příklad 4

Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 5 % své intenzity. Kolik desek je třeba navrstvit na sebe, aby se světlo ztlumilo aspoň na 1/2 své původní intenzity?



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 2 SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

Příklad 5

Určete, za jakou dobu vzroste částka 10 000 Kč uložená na 2 % a částka 9 711 Kč uložená na 3 % na stejnou výši.

Příklad 6

Průměr ocelového drátu se každým tažením zmenšuje 90 %. Jaký bude jeho průměr po deseti taženích, byl-li původní průměr 5 mm? Kolik tažení je nutných k tomu, aby průměr drátu byl menší než 2 mm?

Příklad 7

V podniku za 6 let vzrostla produktivita práce o 15 %. O kolik procent průměrně vzrostla za každý rok?



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury a internetových zdrojů

Výukové materiály a některé úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

O. ODVÁRKO: Matematika pro gymnázia Posloupnosti a řady. Prometheus, 2006

O. ODVÁRKO: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, Posloupnosti a finanční matematika. Prometheus 2007

M. HUDCOVÁ, L. KUBIČÍKOVÁ: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium. Prometheus 2010

P. ČERMÁK, P. ČERVINKOVÁ: Odmaturuj z matematiky 1. Didaktis 2007

<http://www.gymkyjov.cz/sw/ler/perfce.php>

<http://karel.kotynek.sweb.cz/documents/matematika/matematika2r/funkce/1.3.htm>

<http://www.matweb.cz/funkce#gsc.tab=0>

<http://www.matweb.cz/funkce#gsc.tab=0>

<http://www.fi.muni.cz/~hrebicek/maple/mws7/funkce/funkce1.html>

<http://www.gymkyjov.cz/sw/ler/perfce.php>