BINOMICKÁ VĚTA

Motivace:

Při řešení algebraických úloh někdy potřebujeme umocnit dvojčlen (a+b) na přirozené číslo => vypočítat $(a+b)^n$.
Pro n = 2 a n = 3 používáme známé vzorce:
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Teorie:

Pro libovolná čísla a, b a pro každé přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + \binom{n}{n}\cdot a^0 \cdot b^n$$

Binomická věta proto, že binom znamená dvojčlen.
Pravá strana se nazývá **binomický rozvoj** výrazu $(a+b)^n$.
Kombinační čísla nazýváme **binomické koeficienty** (tvoří Pascalův trojúhelník).
Binomický rozvoj má (n+1) členů.

Pro lepší zapamatování vzorce si uvědomíme:

- exponenty mocnin se základem a klesají od n k nule
- exponenty mocnin se základem b rostou od nuly k n
- součet exponentů je v každém členu roven n

Pro určení libovolného členu binomického rozvoje si uvědomíme:

- u prvního členu je koeficient $\binom{n}{0}$,
- u druhého členu je koeficient $\binom{n}{1}$
- u třetího členu je koeficient $\binom{n}{2}$
- u k-tého členu $\binom{n}{k-1}$
- k - tý člen má tvar $\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}$

Řešené úlohy:

Příklad 1.
Vypočtěte $(a+b)^6$

Postup:
Napíšeme binomickou větu:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + \binom{n}{n}\cdot a^0 \cdot b^n$$

Dosadíme do předchozí rovnice n=6:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}\cdot a^6\cdot b^0 + \binom{6}{1}\cdot a^5\cdot b^1 + \binom{6}{2}\cdot a^4\cdot b^2 + \binom{6}{3}\cdot a^3\cdot b^3 + \binom{6}{4}\cdot a^2\cdot b^4 + \binom{6}{5}\cdot a^1\cdot b^5 + \binom{6}{6}\cdot a^0\cdot b^6$$

Vypočítáme kombinační čísla:

$$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$$

$$\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$$

Kombinační čísla dosadíme do binomické věty:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Poznámka:
Místo výpočtů kombinačních čísel můžeme použít Pascalova trojúhelníku a jeho řádku pro n = 6 (jde o sedmý řádek). Můžeme pak přímo dosazovat do binomické věty koeficienty ze schématu.

Příklad 2.
Vypočtěte $\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^4$

Postup:
Užijeme Pascalova trojúhelníku a v pátém řádku zjistíme koeficienty (1 4 6 4 1), které přímo dosadíme do binomické věty:

$$\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^4 = 1\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^0 + 4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^1 + 6\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^1\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^3 + 1\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^0\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^4$$

Po úpravě pravé strany dostáváme:

$$\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^4 = 2^2\cdot 1 + 4\cdot\left(-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right) + 6\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-3\cdot\sqrt{3}\right) + 1\cdot 1\cdot 3^2$$

$$\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^4 = 4 + 8\sqrt{6} + 36 + 12\sqrt{6} + 9$$

$\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^4 = 49+20\sqrt{6}$

Poznámka:
Rozepsání některých úprav provedených na pravé straně rovnice:

$\left(-\sqrt{3}\right)^4 = +\sqrt{3^4} = 3^2$.

$\left(-\sqrt{2}\right)^3 = -\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

$4\cdot\left(-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right) = +8.\sqrt{2}\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$

$4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-3\cdot\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{2}\sqrt{3} = 12\sqrt{6}$

Příklad 3.

Určete 7. člen binomického rozvoje výrazu $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^{10}$, x≠0

Postup:

Napíšeme vzorec pro k-tý člen.

$A_k = \binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}$ Dosadíme: n=10, k=7, a=x^2, b=$\left(-\frac{1}{x^3}\right)$

$A_7 = \binom{10}{6}\cdot\left(x^2\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{x^3}\right)^6$ Při umocňování mocnin exponenty násobíme.

$A_7 = \binom{10}{4}\cdot x^8\cdot\left(\frac{1}{x^{18}}\right)$ Odstraníme zlomek v závorce.

$A_7 = \binom{10}{4}\cdot x^8\cdot x^{-18}$ Při násobení mocnin sčítáme exponenty.

$A_7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot x^{-10}$ Vyčíslíme a převedeme na mocninu s kladným.

$A_7 = \frac{210}{x^{10}}$ exponentem.

Příklad 4.

Určete kolikátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(5x+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$, x≠0 je absolutní (neobsahuje x).

Postup:

Napíšeme vzorec pro k-tý člen.

$$A_k=\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}$$

Dosadíme: a=5x, b=$\frac{1}{x^2}$, n=12, k je neznámá.

$$A_k=\binom{12}{k-1}\cdot(5x)^{12-k+1}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^{k-1}$$

Hledaný k–tý člen položíme roven x^0 (nemá obsahovat x).

$$\binom{12}{k-1}\cdot(5x)^{12-k+1}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^{k-1}=x^0$$

Z rovnice „vytáhneme“ konstanty a upravíme.

$$x^{13-k}\cdot\left(x^{-2}\right)^{k-1}=x^0$$

Mocninu umocníme tak, že exponenty vynásobíme.

$$x^{13-k}\cdot x^{-2k+2}=x^0$$

Při násobení mocnin exponenty sčítáme.

$$x^{15-3k}=x^0$$

Napíšeme rovnost exponentů.

15-3k=0

Vypočítáme neznámou.

15=3k

k=5

$\Rightarrow$ 5. člen neobsahuje x.

Příklad 5.

Kolikátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(\sqrt{2}\cdot x^2-\frac{1}{4x}\right)^{10}$, x≠0 obsahuje x^2?

Postup:

Napíšeme vzorec pro k-tý člen.

$$A_k=\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}$$

Dosadíme: a=$\sqrt{2}x^2$, b=$\left(-\frac{1}{4x}\right)$, n=10

$$A_k=\binom{10}{k-1}\cdot\left(\sqrt{2}x^2\right)^{10-k+1}\cdot\left(-\frac{1}{4x}\right)^{k-1}=x^2$$

a k-tý člen položíme roven x^2.

Z rovnice „vytáhneme“ konstanty a upravíme.

$$\left(x^2\right)^{11-k}\cdot\left(x^{-1}\right)^{k-1}=x^2$$

Umocníme mocniny (exponenty násobíme).

$$x^{22-2k}\cdot x^{-k+1}=x^2$$

Vynásobíme mocniny (exponenty sčítáme).

$$x^{22-2k-k+1}=x^2$$

$$x^{23-3k}=x^2$$

Exponenty se sobě rovnají.

23-2=3k

21=3k $\Rightarrow k = 7 \Rightarrow 7$

<u>Úlohy k procvičování:</u>

1. Vypočtěte podle binomické věty:
   a) $\left(2-\sqrt{2}\right)^7$
   b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^5$
   c) $\left(2-\sqrt{3}\right)^5$
   d) $\left(\frac{2}{a}-3x\right)^3$

Výsledky: a) $8\cdot\left(338-239\sqrt{2}\right)$ b) $109\sqrt{2}+89\sqrt{3}$ c) $362-209\sqrt{3}$ d) $\frac{8}{a^3}-\frac{36}{a^2}\cdot x+\frac{54}{a}\cdot x^2-27x^3$

2. Vypočítejte určené členy binomických rozvojů:
   a) devátý člen rozvoje výrazu $\left(3-\sqrt{3}\right)^{12}$
   b) jedenáctý člen rozvoje výrazu $\left(x-y\right)^{15}$
   c) čtvrtý člen rozvoje výrazu $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$
   d) pátý člen rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{y^2}\right)^8$
   e) sedmý člen rozvoje výrazu $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^9$

Výsledky: a) 55.3^{10} b) $3003x^5y^{10}$ c) $448x^8$ d) $70x^8y^{-8}$ e) 672

3. Určete, který člen binomického rozvoje výrazu
   a) $\left(-3x^2+\frac{1}{3x^2}\right)^8$, $x\neq0$ neobsahuje x
   b) $\left(1+\sqrt{a}\right)^7$, $a\geq0$ obsahuje a^3
   c) $\left(\sqrt{x}-\frac{4}{x}\right)^{14}$, $x>0$ obsahuje x^{-2}

Výsledky: a) pátý člen b) sedmý člen c) sedmý člen