

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	TŘETÍ	Mgr. Tomáš MAŇÁK	22. březen 2014
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
ARITMETICKÁ POSLOUPNOST A JEJÍ UŽITÍ			

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

Teorie:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická** právě tehdy, když existuje takové číslo $d \in \mathbb{R}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} = a_n + d$; d ... **diference**

⇒ Každý člen aritmetické posloupnosti získáme tak, že k předcházejícímu členu přičteme diferenci.

Řešený příklad 1:

Vypište prvních pět členů aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -2$ a prvním členem $a_1 = 3$.

Řešení:

$$d = -2$$

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

využijeme uvedeného vztahu, do kterého postupně dosadíme za proměnnou n přípustná přirozená čísla

$$a_2 = a_1 + d = 3 - 2 = 1$$

vypočteme a_2 dosazením čísla **1** za proměnnou n

$$a_3 = a_2 + d = 1 - 2 = -1$$

vypočteme a_3 dosazením čísla **2** za proměnnou n

$$a_4 = a_1 + d = -1 - 2 = -3$$

vypočteme a_4 dosazením čísla **3** za proměnnou n

$$a_5 = a_1 + d = -3 - 2 = -5$$

vypočteme a_5 dosazením čísla **4** za proměnnou n

výsledek zapišeme takto: $\{3; 1; -1; -3; -5; \dots\}$

Teorie

vztah pro diferenci aritmetické posloupnosti: $a_{n+1} - a_n = d$ ⇒

Rozdíl dvou sousedních členů aritmetické posloupnosti je vždy konstantní a roven danému číslu d .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$a_1; d$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

.

.

.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d} \quad \text{vztah pro } n\text{-tý člen aritmetické posloupnosti}$$

Řešený příklad 2:

Určete diferenci aritmetické posloupnosti $(2n - 4)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

$$d = a_{n+1} - a_n$$

využijeme uvedeného vztahu

$$a_n = 2n - 4$$

vyjádříme a_n (je roven výrazu uvedenému v zadání posloupnosti)

$$a_{n+1} = 2(n+1) - 4 = 2n + 2 - 4 = 2n - 2$$

vyjádříme a_{n+1} tak, že dosadíme výraz $(n+1)$ do členu a_n za proměnnou n

$$d = a_{n+1} - a_n = 2n - 2 - (2n - 4) = 2n - 2 - 2n + 4 = 2$$

vyjádřené členy a_n a a_{n+1} dosadíme do vzorce $d = a_{n+1} - a_n$ a vypočteme diferenci d

$$d = 2$$

výsledek: $d = 2$

Řešený příklad 3:

Určete pátý člen aritmetické posloupnosti, ve které platí: $d = -2$ a $a_2 = 5$.

Řešení:

a) úvahou

$$\{7; 5; 3; 1; -1; \dots\} \Rightarrow \underline{\underline{a_5 = -1}}$$

b) vzorcem pro n-tý člen

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$5 = a_1 - 2$$

$$a_1 = 5 + 2$$

$$a_1 = 7$$

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)d$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_5 = 7 + 4(-2)$$

$$\underline{\underline{a_5 = 7 - 8 = -1}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešený příklad 4:

V aritmetické posloupnosti je dáno $a_4 = 18$ a $a_7 = 16$. Určete a_1 , d , a_{10} .

Řešení:

$$a_4 = 18$$

$$a_7 = 16$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

použijeme vzorec pro výpočet n-tého členu aritmetické posloupnosti

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme

$$18 = a_1 + 3d$$

$$16 = a_1 + 6d \quad / \cdot (-1)$$

zvolíme sčítací metodu

$$18 = a_1 + 3d$$

$$-16 = -a_1 - 6d$$

$$2 = -3d$$

$$d = -\frac{2}{3}$$

vypočteme **diferenci d**

$$18 = a_1 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

vypočtenou diferencii dosadíme do jedné z výše uvedených rovnic

soustavy a vypočteme **první člen posloupnosti a_1**

$$18 = a_1 - 2$$

$$\underline{\underline{a_1 = 20}}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

k výpočtu **10.** členu posloupnosti použijeme opět vztah pro výpočet n-tého členu aritmetické posloupnosti

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1)d$$

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

$$a_{10} = 20 + 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$a_{10} = 20 - 6$$

$$\underline{\underline{a_{10} = 14}}$$

vypočteme **a_{10}**

Teorie

Aplikujeme vzorce $a_n = a_1 + (n - 1)d$ na dva libovolné členy aritmetické posloupnosti **a_r** , a **a_s**

$$a_r = a_1 + (r - 1)d$$

$$a_s = a_1 + (s - 1)d \quad / \cdot (-1)$$

$$a_r = a_1 + (r - 1)d$$

$$-a_s = -a_1 - (s - 1)d$$

$$a_r - a_s = (r - 1)d - (s - 1)d$$

$$a_r - a_s = rd - d - sd + d$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$a_r - a_s = (r - s)d$$

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d \quad \text{vztah mezi libovolnými dvěma členy aritmetické posloupnosti;}$$

$$r, s \in \mathbb{N}$$

V aritmetické posloupnosti dále platí:

$$a_{n-1} = a_n - d$$

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{rovnice sečteme (sčítací metoda)}$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{N} \quad \text{aritmetický průměr}$$

⇒ Každý člen aritmetické posloupnosti počínaje druhým je **aritmetickým průměrem** sousedních členů.

Řešený příklad 5:

Sečtěte prvních sto přirozených čísel.

Řešení:

$$s_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

$$s_{100} = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1$$

$$2s_{100} = \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101}_{100 \text{ krát } 101}$$

$$2s_{100} = 100 \cdot 101$$

$$s_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

$$\underline{s_{100}} = 50 \cdot 101 = \underline{5050}$$

součet zapíšeme v opačném pořadí
rovnice sečteme

součet pod sebou ležících členů je vždy 101; počet těchto členů jdoucích za sebou je 100

výsledek součtu

Teorie

Předchozí řešený příklad 5 můžeme použít k zobecnění vzorce pro výpočet součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti.

Součet prvních n -členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$$

$$2s_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}_{n \text{ krát } (a_1 + a_n)}$$

součet zapíšeme v opačném pořadí
rovnice sečteme

všechny výrazy v závorkách na pravé straně rovnice jsou si rovny a můžeme je nahradit součty $(a_1 + a_n)$; viz řešený příklad 5

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

vztah pro výpočet součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti

Řešený příklad 6:

Vypočtěte součet prvních sto lichých čísel.

Řešení:

$$s_{100} = ?$$

$$s_{100} = 1 + 3 + 5 + \dots ?$$

Jakou hodnotu má 100. liché číslo v tomto pořadí? Je to 199 nebo až 201?

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$d = 2$$

$$a_{100} = ?$$

ze zápisu vyplývá, že diference takovéto posloupnosti je 2 vypočteme hodnotu 100. členu této aritmetické posloupnosti podle vzorce pro výpočet n -tého členu aritmetické posloupnosti

$$a_{100} = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 2$$

$$a_{100} = 1 + 99 \cdot 2$$

$$a_{100} = 1 + 198$$

$$a_{100} = 199$$

100. člen tohoto součtu má hodnotu 199

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

k výpočtu součtu použijeme již známý vzorec

$$s_{100} = \frac{100}{2} \cdot (a_1 + a_{100})$$

do vzorce dosadíme získané hodnoty

$$s_{100} = \frac{100}{2} \cdot (1 + 199) = 50 \cdot 200$$

$$\underline{\underline{s_{100} = 10000}}$$

výsledek

Řešený příklad 7:

Vypište prvních pět členů aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a_1 + a_4 = 1$$

$$a_2 - a_6 = -8$$

Řešení:

$$a_1 + a_4 = 1$$

$$a_2 - a_6 = -8$$

v uvedené soustavě rovnic nahradíme členy a_2 , a_4 a a_6 pomocí prvního členu a_1 a diference d , užitím vzorce $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$a_1 + (a_1 + 3d) = 1$$

$$(a_1 + d) - (a_1 + 5d) = -8$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\begin{aligned} 2a_1 + 3d &= 1 \\ -4d &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_1 + 3d &= 1 \\ \underline{d} &= 2 \end{aligned}$$

vypočtenou diferenci **d** dosadíme do první rovnice a dopočteme **a₁**

$$\begin{aligned} 2a_1 + 3 \cdot 2 &= 1 \\ 2a_1 + 6 &= 1 \\ 2a_1 &= -5 \end{aligned}$$

$$\underline{a_1 = -\frac{5}{2}}$$

vypočtená hodnota **a₁**

Na základě získaných hodnot **a₁** a **d** vypíšeme prvních pět členů aritmetické posloupnosti.

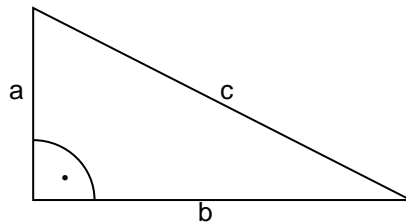
$$\left\{ -\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}; \frac{11}{2}; \dots \right\}$$

výsledek

Řešený příklad 8:

Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou dlouhé, je-li obsah 6 dm²?

$$\begin{aligned} a &= b - d \\ b &= b \\ c &= b + d \end{aligned}$$



Řešení:

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2} = 6$$

$$S_{\Delta} = \frac{(b-d) \cdot b}{2} = 6$$

$$(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$$

Pythagorova věta

$$(b-d) \cdot b = 12$$

$$b^2 - 2bd + d^2 + b^2 = b^2 + 2bd + d^2$$

$$b^2 - bd = 12$$

$$2b^2 - 2bd + d^2 = b^2 + 2bd + d^2$$

$$b^2 - bd = 12 \quad / \cdot (-4)$$

$$b^2 - 4bd = 0$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$-4b^2 + 4bd = -48$$

$$b^2 - 4bd = 0$$

rovnice sečteme (sčítací metoda)

$$-3b^2 = -48 \quad |:(-3)$$

$$b^2 = 16$$

$$|b| = 4$$

$$\underline{b = 4}$$

$$16 - 16d = 0$$

dosazením vypočtené hodnoty b do libovolné rovnice soustavy, vypočteme diferenci d

$$16d = 16$$

$$d = 1$$

$$\underline{a = 3; b = 4; c = 5}$$

dopočteme zbývající strany pravoúhlého trojúhelníku, a a c ; výsledek

Řešený příklad 9:

Rozhodněte, která z čísel 71, 100 jsou členy aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž je $a_1 = -10$, $d = 4,5$

Řešení:

Pokud je číslo 71 n -tým členem aritmetické posloupnosti, pak musí platit

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$71 = -10 + (n - 1) \cdot 4,5$$

dostáváme lineární rovnici s jednou neznámou $n \in \mathbb{N}$

$$71 = -10 + 4,5n - 4,5$$

$$85,5 = 4,5n$$

$$\underline{\underline{n = 19}}$$

protože číslo 19 je přirozené číslo, číslo 71 je 19-tým členem aritmetické posloupnosti

Stejným způsobem ověříme i číslo 100.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$100 = -10 + (n - 1) \cdot 4,5$$

$$100 = -10 + 4,5n - 4,5$$

$$114,5 = 4,5n$$

$$\underline{\underline{n = 25,4}}$$

vypočtená hodnota n není přirozené číslo, tzn. číslo 100 není n -tým členem aritmetické posloupnosti

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 1

- 1) V aritmetické posloupnosti jsou dány její členy $a_3 = 5$, $a_8 = 15$. Určete diferenci d a členy a_1 a a_7 .
- 2) V aritmetické posloupnosti je dáno: $a_1 = 450$, $d = -24$, $a_n = 210$. Určete počet členů n a součet těchto prvních n členů s_n .
- 3) Mezi čísla 2,6 a 4,7 vložte devět čísel takových, aby s danými čísly tvořila konečnou aritmetickou posloupnost.
- 4) Vypočtěte diferenci aritmetické posloupnosti, ve které:
 - a) $a_1 = 2$
 $a_{10} = 92$
 - b) $a_1 = -7$
 $a_{10} = 2$
- 5) Vypište prvních osm členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž je:
 $a_1 = 0,5$
 $d = 3$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 2

- 6) Určete součet prvních dvanácti členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

$$a_1 = 2$$

$$a_8 = -19$$

- 7) Vypište prvních deset členů aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a_1 + a_7 = 42$$

$$a_{10} - a_3 = 21$$

- 8) Vypočtěte součet všech dvojciferných celých kladných čísel.

- 9) Vypočtěte součet všech sudých trojciferných celých kladných čísel.

- 10) V aritmetické posloupnosti je dána diference $d = -12$, n -tý člen má hodnotu 15 a součet všech jejích prvních členů je 456. Vypočtěte počet členů takovéto aritmetické posloupnosti a její první člen.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 3

- 11) V aritmetické posloupnosti je $a_1 = -85$, $d = 4$. Určete index prvního členu této posloupnosti, který je kladným číslem.
- 12) Teplota Země přibývá do hloubky přibližně o 1°C na 33 metrů. Jaká je teplota na dně dolu 1015 m hlubokého, je-li v hloubce 25 m teplota 9°C ?
- 13) Železné trubky jsou narovnány do deseti vrstev. Ve spodní vrstvě je jich 85, v každé další vrstvě o jednu méně. Kolik trubek je celkem srovnáno?
- 14) Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé vrstvy horní zapadají do mezer vrstvy dolní. Do kolika vrstev se složí 90 rour, jsou-li v nejhořejší vrstvě dvě roury? Kolik rour je v nejspodnější vrstvě?
- 15) Máme devět řad konzerv umístěných nad sebou. Ve třetí řadě shora jsou 4 konzervy a v šesté řadě shora je 7 konzerv. Určete počet konzerv, jedná-li se o aritmetickou posloupnost.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 4

- 16) Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jeho delší odvěsna má délku 24 cm. Jak jsou dlouhé zbývající strany trojúhelníku?
- 17) Pětistupňový kotouč pro převody rychlostí má mít krajní poloměry 100 mm a 340 mm. Vypočtete poloměry zbývajících stupňů (tloušťky všech stupňů se sobě rovnají).
- 18) Cvičenci stojí na značkách v řadách přesně 1,5 m od sebe vzdálených. Určete jejich počet, tvoří-li rozšiřující se trojúhelníkový klín, v němž je vzdálenost čelního cvičence od zadní řady 30 m. Přitom v každé řadě je o jednoho cvičence více než v řadě předchozí.
- 19) Určete takové nejmenší přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, pro něž je s_n v aritmetické posloupnosti $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ větší než 60.
- 20) V sedmi regálech je srovnáno 259 knih tak, že v každém následujícím regálu je o 4 knihy více než v předchozím. Kolik knih je v regálu s největším počtem knih?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 5

- 21) Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je jí třeba pokrýt taškami. Do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do řady při okapu 102 tašek. Přitom tašky budou srovnány do řad tak, že v každé následující řadě bude o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba koupit tašek?
- 22) Délky stran kváдру tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou veliké, měří-li jejich součet 24 cm a objem kváдру je 312 cm^2 ?
- 23) V aritmetické posloupnosti platí: $a_1 + a_5 = 30$; $a_3 + a_4 = 36$. Určete a_1 a d . Kolik členů této posloupnosti dává součet 2700?
- 24) Při teplotě -10°C byla naměřena rychlost šíření zvuku ve vzduchu 325 m/s. Dále bylo zjištěno, že při zvýšení teploty o 1°C se rychlost šíření zvuku zvýší o 0,6 m/s. Jaká je rychlost šíření zvuku při teplotě 30°C ?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 6

25) Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou dlouhé, je-li obvod trojúhelníku 96 cm.

26) V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 3$, $d = 4$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250?

Použitá literatura:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

O. Odvárko, E. Calda, J. Kolouchová, J. Řepová: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 6. část, SPN 1987

O. Odvárko: Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady, Prometheus 2006