

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	DRUHÝ	Mgr. Tomáš MAŇÁK	21. června 2012
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ			

Teoretická část

GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

Zobrazení Z v rovině je předpis, kterým je každému bodu X roviny přiřazen právě jeden bod X' této roviny.

zapisujeme: **$Z: X \rightarrow X'$**



SHODNÁ ZOBRAZENÍ

Úloha: Najděte ve svém okolí shodné geometrické útvary. Jaké dva geometrické útvary považujeme za shodné?

říkáme a zapisujeme: útvar U je shodný s útvarem $U' \Rightarrow U \cong U'$

(symbol shodnosti)



Shodné zobrazení neboli shodnost je každé zobrazení v rovině, které má tu vlastnost, že pro libovolné body A, B roviny (vzory) a jejich obrazy A', B' platí:

$$|A'B'| = |AB|$$

$\Rightarrow$ (shodné zobrazení zachovává velikosti úseček)



Druhy shodných zobrazení:

- **Identita** (totožnost)
- **Osová souměrnost**
- **Středová souměrnost**
- **Posunutí** (translace)
- **Otočení** (rotace)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

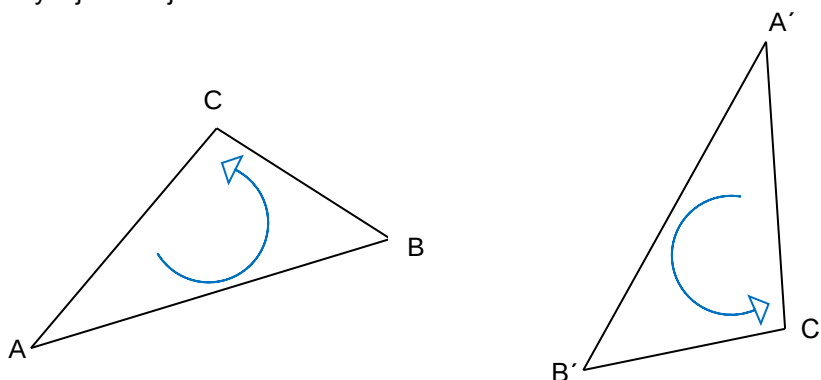
Rozlišujeme:

1) Přímou shodnost:

Zobrazí každý orientovaný úhel na souhlasně orientovaný úhel

- *identita*
- *středová souměrnost*
- *posunutí*
- *otočení*

Chceme-li takovéto shodné útvary přemístit tak, aby se kryly, pak se při ztotožňování útvary pohybují ve stejném směru otáčení.



$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

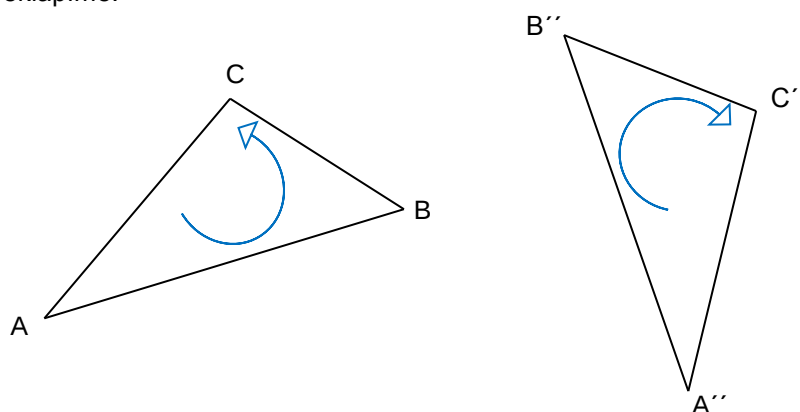
Trojúhelníky ABC a A'B'C' mají vrcholy shodně orientované (v záporném směru otáčení = ve směru chodu hodinových ručiček) – jsou **přímo shodné**.

2) Nepřímou shodnost:

Zobrazí každý orientovaný úhel na opačně orientovaný

- *osová souměrnost*

Chceme-li takovéto shodné útvary přemístit tak, aby se kryly, pak při ztotožňování jeden útvar překlápíme.



$$\triangle ABC \cong \triangle A''B''C''$$

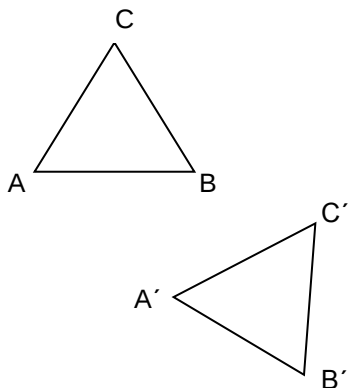
Trojúhelníky ABC a A''B''C'' nemají vrcholy shodně orientované (trojúhelník ABC má vrcholy orientované v kladném smyslu = proti směru chodu hodinových ručiček; trojúhelník A''B''C'' má vrcholy orientované v záporném smyslu = ve směru chodu hodinových ručiček) – jsou **nepřímo shodné**.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

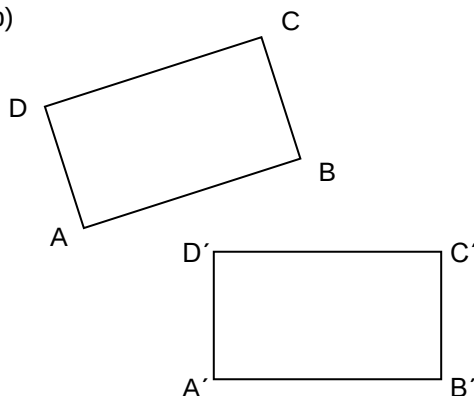
Procvičování:

- 1) Musí být shodné každé dva čtverce nebo každé dva obdélníky vepsané do jedné kružnice?
- 2) Je mezi útvary na obrázcích shodnost přímá nebo nepřímá?

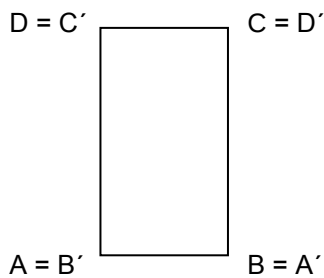
a)



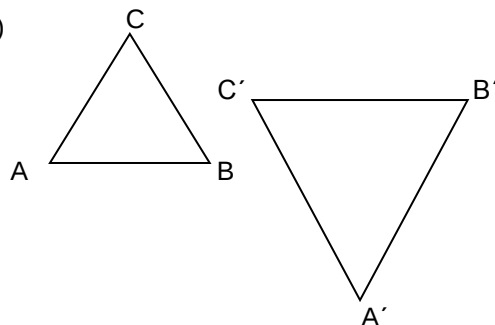
b)



c)



d)



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

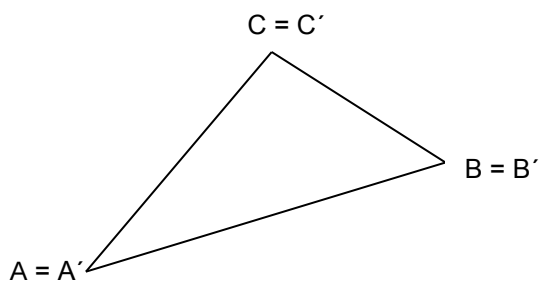
Pracovní list 1

A) IDENTITA (TOTOŽNOST)

je zobrazení v rovině, ve kterém je každému bodu X dané roviny přiřazen týž bod $X' = X$

X ... vzor ; X' ... jeho obraz

Bodům, pro které platí, že jejich **obrazy splývají se vzorem** tj. $X = X'$, říkáme **samodružné body**.



Závěr: **Identita má všechny body samodružné a všechny přímky samodružné.**



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 2

B) OSOVÁ SOUMĚRNOST S OSOU o

je zobrazení v rovině, které je jednoznačně určeno **osou souměrnosti o** nebo **uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů**.

Osová souměrnost **$O(o)$** s osou **o** , přiřazuje:

- 1) každému bodu **$X \in o$** bod **$X' = X$** ,
- 2) každému bodu **$X \notin o$** bod **X'** tak, že přímka **$XX' \perp o$** a úsečka **XX'** je osou **o** půlena.

a) zobrazení bodu v osově souměrnosti s osou o

b) zobrazení přímky v osově souměrnosti s osou o



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 3

- c) zobrazení rovinného útvaru v osově souměrnosti s osou o

Závěr:

Osová souměrnost má všechny body osy souměrnosti samodružné.
Samodružnými přímkami v osově souměrnosti jsou osa souměrnosti a všechny
přímky k ní kolmé.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

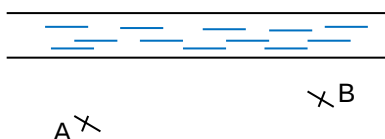
Pracovní list 4



www.google.cz

Procvičování:

- 1) Uveďte příklady osových souměrností, se kterými se můžeme setkat v běžném životě.
- 2) Jsou dány body A, B, které leží v téže polorovině ohraničené přímkou p . Najděte na přímce p bod X tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl co nejmenší.
- 3) Jsou dány přímky p, q . Určete osu o osově souměrnosti, ve které je přímka q obrazem přímky p .
- 4) Kolik os souměrnosti má kružnice?
- 5) Na břehu řeky se má postavit vodárenská věž, ze které by se čerpala voda do obcí A a B. Kde je třeba postavit věž, aby se spotřebovalo co nejméně potrubí? (Do každé obce povede potrubí samostatně.)



- 6) Je dán pravidelný šestiúhelník ABCDEF. Určete jeho obraz v osově souměrnosti s osou o . Volte přítom:
 - a) o prochází bodem A a protínající úsečku BC v jejím vnitřním bodě,
 - b) o je přímka AB,
 - c) o je přímka AC,
 - d) o je přímka AD.
- 7) Je dána uzavřená lomená čára ABCDA, která je hranicí čtverce ABCD. Ve kterých osových souměrnostech má daná lomená čára:
 - a) právě dva samodružné body,
 - b) jedinou samodružnou stranu,
 - c) právě dvě samodružné strany?
- 8) Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dán jejich obvod $o = 12$ cm a úhly $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 5

C) STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST SE STŘEDEM S

je zobrazení v rovině, které je jednoznačně určeno **středem souměrnosti S** nebo **uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů**.

Středová souměrnost **$S(S)$** se středem **S** , přiřazuje:

- 1) středu souměrnosti **S** bod **$S' = S$** ,
- 2) každému bodu **$X \neq S$** bod **X'** tak, že úsečka **XX'** je bodem **S** půlena.

a) zobrazení bodu ve středové souměrnosti se středem S

b) zobrazení přímky ve středové souměrnosti se středem S



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 6

- c) zobrazení rovinného útvaru ve středové souměrnosti se středem S

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Závěr: Středová souměrnost má jeden samodružný bod (střed souměrnosti) a všechny přímky procházející středem souměrnosti jsou samodružné.

Pracovní list 7



www.google.cz

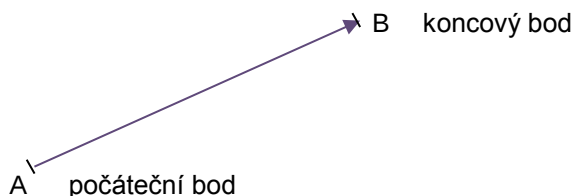
Procvičování:

- 1) Pojmenujte nebo načrtněte příklady útvarů, které jsou souměrné podle středu.
- 2) Jsou dány dvě stejně dlouhé rovnoběžné úsečky. Najděte střed středové souměrnosti, který zobrazuje jednu úsečku na druhou.
- 3) Existuje nějaký geometrický útvar, který má několik různých středů souměrnosti?
- 4) Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(O;r_1)$, $k_2(O;r_2)$; $r_1 > r_2$ a bod S ležící na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník ABCD se středem S , jehož vrcholy leží v daných kružnicích.
- 5) Společným bodem dvou kružnic k_1 a k_2 vedte přímku tak, aby na ní dané kružnice vytínaly shodné tětivy.
- 6) Je dán trojúhelník ABC. Určete jeho obraz ve středové souměrnosti se středem S , je-li:
 - a) $S = T$,
 - b) $S = O$,
 - c) $S = S_0$,
 kde T je těžiště, O průsečík výšek, S_0 střed kružnice opsané trojúhelníku ABC.
- 7) Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M . Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.
- 8) Je dána úsečka AA_1 ; $|AA_1| = 4,5$ cm. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem u vrcholu C , v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6$ cm.
- 9) Je dána úsečka AA_1 ; $|AA_1| = 5$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $c = 4$ cm a $b = 7$ cm.

D) POSUNUTÍ (TRANSLACE)

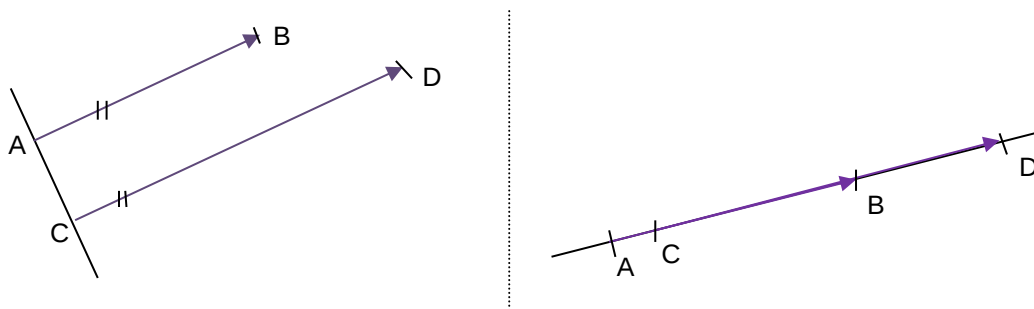
je zobrazení v rovině, které je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů, jež určuje vektor posunutí.

Orientovaná úsečka AB je taková úsečka, jejíž krajní body mají určené pořadí. Jeden její krajní bod je tzv. počáteční bod; druhý krajní bod je koncový bod.



Existuje i nulová orientovaná úsečka, tj. úsečka, jejíž počáteční bod splývá s koncovým bodem a jedná se tím pádem o bod.

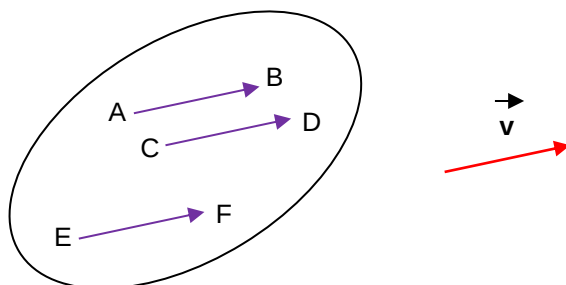
Nenulové orientované úsečky AB a CD nazýváme **souhlasně orientované**, jsou-li přímky AB a CD rovnoběžné různé a koncové body B, D leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC; nebo přímky AB a CD splývají a jedna z nich je částí druhé.



Všechny souhlasně rovnoběžné úsečky mají též **směr**.

Délkou (velikostí) orientované úsečky AB rozumíme délku $|AB|$ úsečky AB.

Množina všech orientovaných úseček téhož směru a téže délky se nazývá **vektor**.



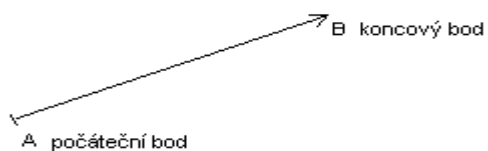
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 9

Je dána orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Posunutí (translace) je shodné zobrazení $T(\overrightarrow{AB})$, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{XX'}$ jsou souhlasně orientované a platí $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{XX'}|$

Je-li vektor posunutí nulový, pak se jedná o identitu.

Délka vektoru posunutí určuje délku posunutí, směr vektoru posunutí určuje směr posunutí.



značení vektorů: $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$

nulový vektor: $\vec{0}$

a) zobrazení bodu v posunutí $T(\overrightarrow{AB})$

b) zobrazení přímky v posunutí $T(\overrightarrow{AB})$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

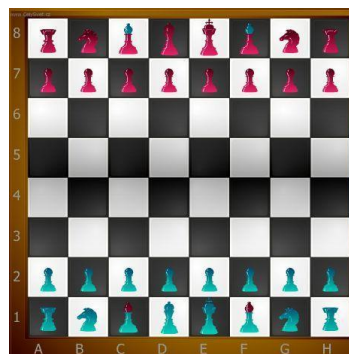
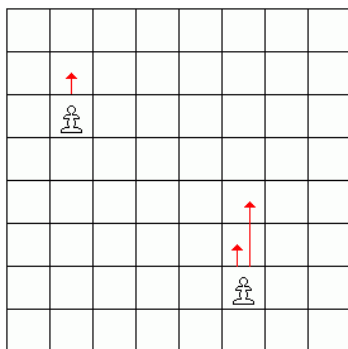
Pracovní list 10

c) zobrazení rovinného útvaru v posunutí $T(AB)$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Závěr: Jestliže vektor posunutí není nulový, pak posunutí nemá žádný samodružný bod.
Samodružné přímky jsou všechny přímky rovnoběžné s vektorem posunutí.

Pracovní list 11

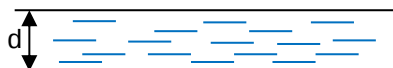


<http://www.deskovehry.info/pravidla/sachy.htm>

Procvičování:

- 1) Chceme-li posunout např. dámou na šachovnici, musíme si rozmyslet, kterým směrem a jak daleko. U posouvání rozlišujeme jeho směr a velikost. Jaké trajektorie budou opisovat jednotlivé body figurky při posouvání z B3 na E6, nebudeme-li figurkou otáčet?
- 2) Místa A, B leží na opačných březích přímého toku řeky šířky d . Určete místo pro postavení mostu tak, aby vzdálenost z A do B byla co nejkratší.

A X



X B

- 3) Jsou dány dvě shodné kružnice k a k' . Určete posunutí, které zobrazuje kružnici k na kružnici k' .
- 4) Jsou dány dvě různoběžné přímky a , b a úsečka MN . Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in a$, $B \in b$, $AB \parallel MN$ a $|AB| = |MN|$.
- 5) Jsou dány přímky $a \parallel b$ a bod M , který neleží na žádné z nich. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a , b a prochází bodem M .
- 6) Je dán trojúhelník ABC . Určete jeho obraz v posunutí:
 - a) $T(AB)$,
 - b) $T(AA_1)$; A_1 je střed strany BC ,
 - c) $T(AO)$; O je průsečík výšek.
- 7) Jsou dány kružnice $k_1(S_1; 3\text{cm})$, $k_2(S_2; 2\text{cm})$, $|S_1S_2| = 7\text{ cm}$. Sestrojte všechny úsečky XY , pro které platí $X \in k_1$, $Y \in k_2$, $XY \parallel S_1S_2$, $|XY| = \frac{1}{2} |S_1S_2|$.
- 8) Jsou dány dvě různoběžky a , b a úsečka MN . Sestrojte čtverec $ABCD$, pro který platí $A \in a$, $B \in b$, $AB \parallel MN$, $|AB| = |MN|$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 9) Sestrojte lichoběžník ABCD, jsou-li dány délky obou jeho základů a , c a obou jeho úhlopříček e , f .

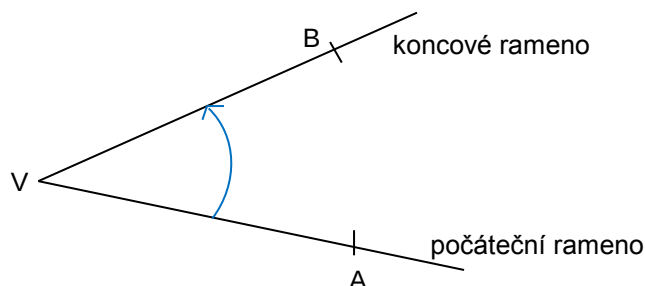
Pracovní list 12

E) OTOČENÍ (ROTACE) KOLEM STŘEDU S O ÚHEL α

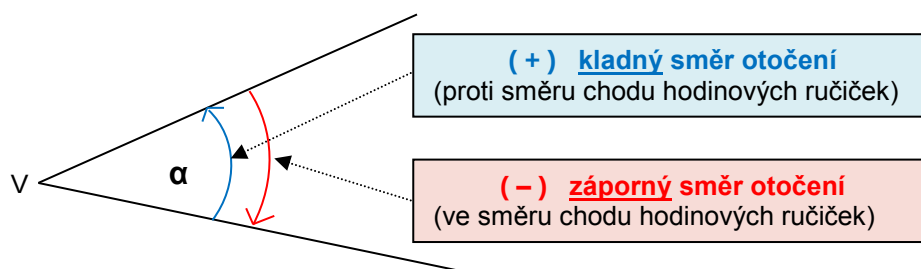
je zobrazení v rovině, které je jednoznačně určeno středem otočení S a orientovaným úhlem α $\in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$

Orientovaný úhel je úhel, u něhož je určeno, které jeho rameno je tzv. počáteční rameno a druhé rameno je pak koncovým ramenem.

Např.: orientovaný úhel AVB znamená, že $\overrightarrow{VA}$ je počátečním ramenem a $\overrightarrow{VB}$ je koncovým ramenem tohoto úhlu



dále rozlišujeme: kladný a záporný směr otočení



Je dán orientovaný úhel α a bod S . Otočení (rotace) je shodné zobrazení $R(S; \alpha)$, se středem otočení S a orientovaným úhlem otočení $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$, které přiřazuje:

- 1) bodu S bod $S' = S$,
- 2) každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|SX| = |SX'|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost α (úhly α a XSX' jsou shodné a souhlasně orientované).



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 13

a) zobrazení bodu v rotaci $R(S;\alpha)$

b) zobrazení přímky v rotaci $R(S;\alpha)$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list 14

c) zobrazení rovinného útvaru v rotaci $R(S; \alpha)$

Závěr: Otočení má jediný samodružný bod S.
Pro $\alpha = 360^\circ$ jsou všechny body samodružné.
Pro $\alpha \neq 360^\circ$ a $\alpha \neq 180^\circ$ nemá otočení žádné samodružné přímky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro $\alpha = 180^\circ$ jsou samodružné všechny přímky procházející středem souměrnosti S .
Pro $\alpha = 360^\circ$ jsou samodružné všechny přímky roviny.

Pracovní list 15



www.google.cz

Procvičování:

- 1) Jaký pohyb může vykonávat čepel zavíracího nože vzhledem ke střešce?
- 2) Jsou dány dva různé body A, A' . Kde leží všechny středy otočení, které zobrazují A na A' ?
- 3) Kolik různých otočení zobrazí daný:
 - a) rovnostranný trojúhelník,
 - b) čtverec,
 na sebe?
- 4) Na téže straně odbočují od silnice dvě polní cesty, které s ní svírají úhly o velikostech $\alpha = 48^\circ 28'$ a $\beta = 65^\circ 28'$. Jakou velikost má úhel, který svírají tyto cesty mezi sebou, jsou-li úhly α, β měřeny
 - a) se stejnou orientací,
 - b) s opačnou orientací?
- 5) Určete velikost úhlu otočení malé (velké) hodinové ručičky od 6:30h do 14:15h téhož dne.
- 6) Určete velikost orientovaného úhlu, který svírá velká a malá hodinová ručička ve smyslu chodu v 5h, ve 3:15h.
- 7) Do čtverce $ABCD$ vepište rovnostranný trojúhelník KLM , jestliže $K \in AB$.
- 8) Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b .
- 9) Je dána kružnice $k(S; r = 2,5 \text{ cm})$ a bod P ve vzdálenosti 4 cm od bodu S . Bodem P vedte přímku q , na níž kružnice k vytíná úsečku o délce 3 cm.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 10) Je dána kružnice $k(S; r = 3 \text{ cm})$ a bod A ($|SA| = 1,5 \text{ cm}$). Sestrojte všechny tětiny XY kružnice k o délce $5,5 \text{ cm}$, které procházejí bodem A .

Zdroje použité literatury a obrázků:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

J. Molnár: Matematika pro střední odborné školy – Planimetrie, Prometheus 2011

E. Pomykalová: Matematika pro gymnázia – Planimetrie, Prometheus 2007

E. Calda, O. Petránek, J. Řepová: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – 1. část, Prometheus 2010

www.google.cz

<http://www.deskovehry.info/>