



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	DRUHÝ	MGR. JÜTTNEROVÁ	27. 5. 2012
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
PODOBNOST A STEJNOLEHLOST			

PODOBNOST

Je každé zobrazení v rovině takové, že pro libovolné body A, B dané roviny a jejich obrazy A', B' platí: $|A'B'| = k \cdot |AB|$.

- k - poměr podobnosti; $k > 0$
- zvláštní případy: $k = 1 \rightarrow$ shodnost
 $k > 1 \rightarrow$ zvětšení
 $0 < k < 1 \rightarrow$ zmenšení

Útvary U a U' nazýváme podobnými:

- je – li možné najít podobné zobrazení, které převádí útvar U v útvar U'

PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

$\triangle A'B'C'$ je podobný $\triangle ABC$ s poměrem podobnosti $k > 0$, jestliže platí:

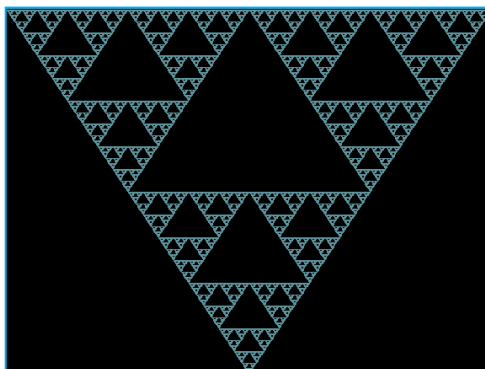
$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$

$$|B'C'| = k \cdot |BC|$$

$$|A'C'| = k \cdot |AC|$$

- zápis: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

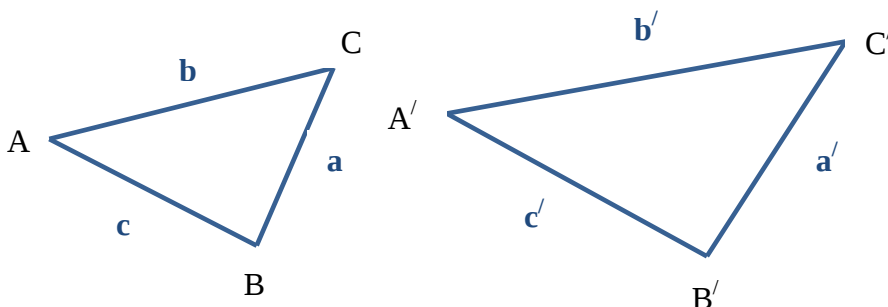


Zdroj: <http://chaos.fraktaly.sweb.cz/strs/4/IFS.html>

Věty o podobnosti trojúhelníků:

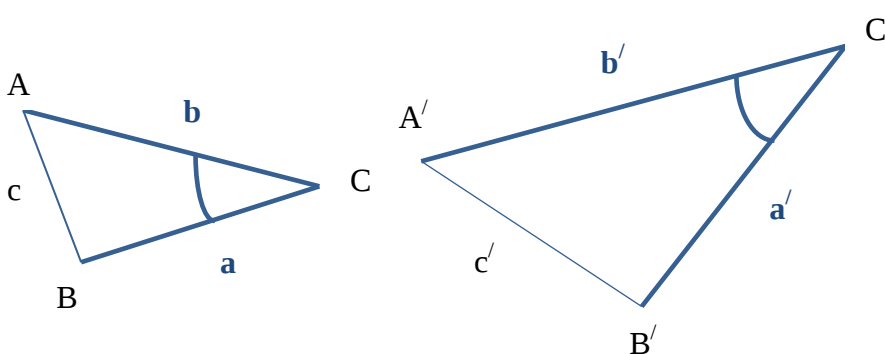
- Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují – li se ve všech poměrech velikostí sobě odpovídajících stran.

(sss)



- Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v poměrech velikostí dvou odpovídajících si stran a v úhlu jimi sevřeném.

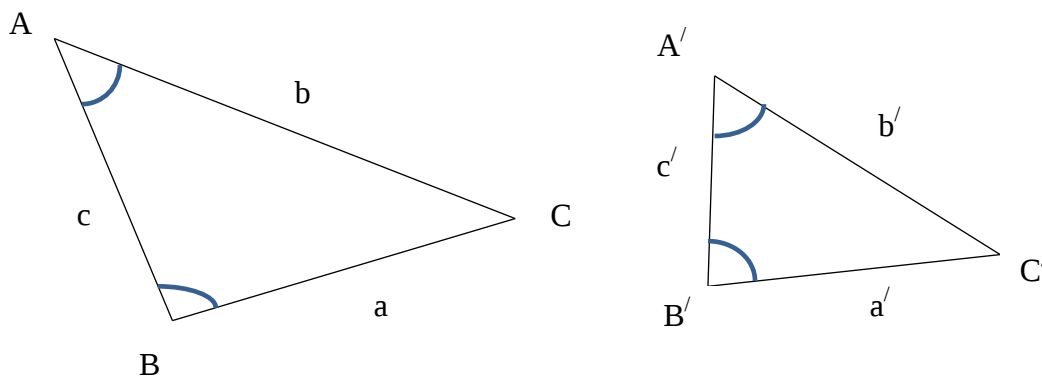
(sus)



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

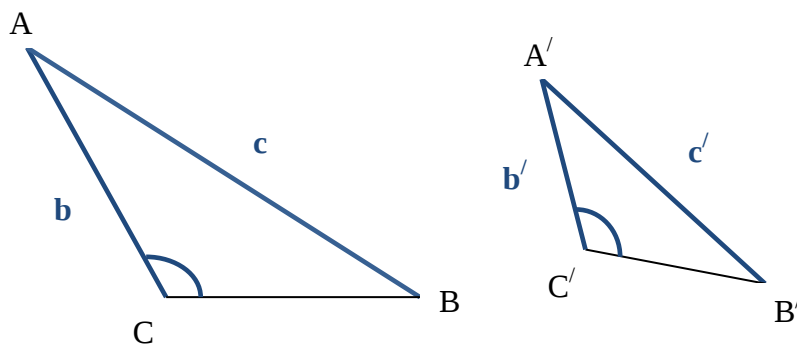
- Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou úhlech.

(uu)



- Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se poměry velikostí dvou stran a rovnají-li se velikosti úhlů ležících proti většímu z nich.

(Ssu)



Obvody podobných trojúhelníků:

Poměry obvodů podobných trojúhelníků jsou stejné jako poměry odpovídajících si stran.

$$\frac{o_1}{o_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$$

Obsahy podobných trojúhelníků:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{c_1^2}{c_2^2} = k^2$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 1 - PODOBNOST

Příklad 1

Určete, zda jsou podobné:

- a) každé dva rovnostranné trojúhelníky

- b) každé dva rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky

Příklad 2

Trojúhelníky ABC a TUV mají strany délky $a = 8,8$ cm, $b = 5,6$ cm, $c = 4,2$ cm, $t = 84$ mm, $u = 132$ mm, $v = 63$ mm. Zjistěte, zda jsou podobné. Pokud ano, určete poměr podobnosti a zapište tuto podobnost.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 2 - PODOBNOST

Příklad 3

Trojúhelník ABC má strany $a = 5,2$ cm; $b = 48$ mm; $c = 60$ mm. Vypočtěte velikost stran trojúhelníku $A'B'C'$, který je podobný trojúhelníku ABC a má obvod $o' = 13,5$ cm.

Příklad 4

Zjistěte, zda rovnoramenné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné, je – li dáno:
 $|AB| = 24$ mm; $v_c = 16$ mm; $|A'B'| = 72$ mm; $|A'C'| = 60$ mm.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 3 - PODOBNOST

Příklad 5

Zkraťte úsečku délky 11 cm na $\frac{5}{7}$ její původní délky.

Příklad 6

Prodlužte úsečku délky 6 cm na $\frac{7}{4}$ její původní délky.

Příklad 7

Rozdělte úsečku délky 8 cm v poměru 4:3

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 4 - PODOBNOST

Příklad 8

Stín věže je dlouhý 70 m a stín metrové tyče má v tutéž dobu délku 150 cm. Vypočtete výšku věže.

Příklad 9

Určete měřítko mapy, jestliže trojúhelníkové pole o rozměrech 162,5 m; 117,5 m; 180 m, je na mapě zakresleno jako trojúhelník o stranách 6,5 mm; 4,7 mm; 7,2 mm.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklady k procvičování:

- 1) Necht' $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Určete délky stran a , b' , je-li $c = 7$ cm, $c' = 3$ cm, $b = 2,3$ cm, $a' = 4$ cm.
- 2) Zjistěte, zda jsou trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ podobné, je-li $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 9$ cm, $a' = 5$ cm, $b' = 6,6$ cm, $c' = 7,5$ cm
- 3) Vypočtete délky stran a , b , c trojúhelníku ABC, který je podobný trojúhelníku $A'B'C'$, je-li obvod trojúhelníku ABC $o = 100$ cm a jsou dány velikosti stran $a' = 8$ cm; $b' = 14$ cm; $c' = 18$ cm.
- 4) Rozdělte úsečku délky 10 cm v poměru 2:3:4
- 5) Zkraťte úsečku délky 8 cm na $\frac{4}{5}$ její původní délky.
- 6) Prodlužte úsečku délky 5 cm na $\frac{5}{3}$ její původní délky.
- 7) Rozdělte danou úsečku na pět shodných částí.
- 8) Jsou dány trojúhelníky ABC a $A'B'C'$: $a = \frac{3}{5}$ dm, $b = \frac{11}{6}$ dm, $\gamma = 70^\circ$, $a' = \frac{5}{2}$ dm, $b' = \frac{11}{4}$ dm. Zjistěte, zda jsou podobné. Jestliže ano, určete poměr podobnosti a zapište tuto podobnost.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STEJNOLEHLOST (homotetie)

PRACOVNÍ A VÝUKOVÝ LIST 1 - STEJNOLEHLOST

Stejnolehlost se středem S a koeficientem stejnolehlosti $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je podobné zobrazení v rovině, které:

1. Bodu S přiřazuje jako obraz bod $S' = S$
2. Každému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' takový, že platí: $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$

Přitom pro $\lambda > 0$ leží X' na polopřímce SX ,
pro $\lambda < 0$ leží X' na polopřímce opačné k polopřímce SX .

Označení stejnolehlosti: **$H(S; \lambda)$**

Zobrazení bodu:

a) $\lambda = -3$

d) $\lambda = 1$

b) $\lambda = -1$

e) $\lambda = 2$

c) $\lambda = -\frac{1}{3}$

f) $\lambda = 3$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ A VÝUKOVÝ LIST 2 - STEJNOLEHLOST

Zobrazení přímky:

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

a) $S \in p$

b) $S \notin p$

$$\lambda = -2$$

a) $S \in p$

b) $S \notin p$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ A VÝUKOVÝ LIST 3 - STEJNOLEHLOST

Vlastnosti stejnolehlosti:

- Každá stejnolehlost s koeficientem λ je podobnost s poměrem podobnosti $k = |\lambda|$.
- Zvláštní případy: $\lambda = -1 \rightarrow$ středová souměrnost
 $\lambda = 1 \rightarrow$ identita
- Je-li $\lambda \neq 1 \rightarrow$ **jeden samodružný bod je střed stejnolehlosti**
samodružné přímky jsou všechny přímky procházející středem stejnolehlosti
- Stejnolehlost zobrazuje každou přímku na přímku s ní rovnoběžnou
- Stejnolehlost zobrazuje každou úsečku XY na úsečku $X'Y'$, pro kterou platí:
 1. $XY \parallel X'Y'$
 2. $|X'Y'| = |\lambda| \cdot |XY|$

Příklad:

Zvolte dvě rovnoběžné úsečky AB a CD a najděte středy stejnolehlostí, v nichž je jedna úsečka vzorem a druhá obrazem.

Závěr:

Každé dvě rovnoběžné úsečky, které nejsou shodné, jsou stejnolehlé dvěma způsoby:

$$\lambda = \frac{|CD|}{|AB|}; \lambda > 0$$

$$\lambda = \frac{|CD|}{|AB|}; \lambda < 0$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ A VÝUKOVÝ LIST 4 – STEJNOLEHLOST

Zobrazení útvaru:

Sestrojte obraz čtverce ABCD ve stejnolehlosti $H\left(A; -\frac{3}{2}\right)$.

Ve stejnolehlosti $H\left(S; \frac{5}{3}\right)$ sestrojte obraz rovnoběžníku ABCD.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ A VÝUKOVÝ LIST 5 - STEJNOLEHLOST

Stejnolehlost kružnic

Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 s různými poloměry. Určete všechny stejnolehlosti, v nichž obrazem kružnice k_1 je kružnice k_2 .

a) *Nesoustředné kružnice:* $O_1 \neq O_2$; $k_1(O_1, r_1)$; $k_2(O_2, r_2)$; $r_1 \neq r_2$

b) *Soustředné kružnice:* $O_1 = O_2$; $k_1(O_1, r_1)$; $k_2(O_2, r_2)$; $r_1 \neq r_2$

Závěr:

- Každé dvě kružnice $k_1(O_1, r_1)$; $k_2(O_2, r_2)$ s různými poloměry jsou **stejnolehlé právě dvěma způsoby**.
- Středů stejnolehlostí S_1, S_2 leží na přímce procházející středy kružnic a koeficienty stejnolehlostí jsou $\lambda_1 = \frac{r_2}{r_1}$; $\lambda_2 = -\frac{r_2}{r_1}$.
- Bod S_1 ležící vně úsečky O_1O_2 je **vnější střed stejnolehlostí**.
- Bod S_2 ležící uvnitř úsečky O_1O_2 je **vnitřní střed stejnolehlostí**.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ A VÝUKOVÝ LIST 6 - STEJNOLEHLOST

Příklad:

Sestrojte společné tečny dvou kružnic: $k_1(O_1; r_1 = 4,5\text{cm})$, $k_2(O_2; r_2 = 2\text{cm})$, $|O_1O_2| = 8\text{cm}$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ A VÝUKOVÝ LIST 7 - STEJNOLEHLOST

Příklad:

Je dána kružnice o poloměru 3 cm. Sestrojte její obraz ve stejnolehlosti $H(S; \lambda)$, jestliže S leží vně kružnice, $\lambda = -\frac{3}{2}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklady k procvičování:

- 1) Sestrojte obraz bodu P ve stejnolehlosti $H\left(S, \lambda = \frac{1}{3}\right); |PS| = 7\text{cm}$.
- 2) Sestrojte obraz úsečky $AB; |AB| = 4\text{cm}$ ve stejnolehlosti $H(S; \lambda)$, je-li: $\lambda = 2$
- 3) Sestrojte obraz úsečky $AB; |AB| = 4,5\text{cm}$ ve stejnolehlosti $H(S; \lambda)$, je-li: $\lambda = -\frac{1}{2}$
- 4) Sestrojte obraz trojúhelníku $KLM; |KL| = 3\text{cm}; |KM| = 4\text{cm}; |LM| = 5\text{cm}$ ve stejnolehlosti $H\left(S, \lambda = \frac{4}{3}\right)$, jestliže S leží vně trojúhelníku.
- 5) Sestrojte obraz libovolného trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti $H\left(B, \lambda = -\frac{5}{7}\right)$.
- 6) Sestrojte obraz čtverce $ABCD$ ve stejnolehlosti $H\left(A, \lambda = -\frac{4}{3}\right)$.
- 7) Sestrojte obraz obdélníku $ABCD$ ve stejnolehlosti $H\left(S, \lambda = \frac{3}{5}\right)$. S leží vně obdélníku.
- 8) Sestrojte obraz libovolného trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti $H(S, \lambda)$,
je – li: a) $S \in AB; \lambda = \frac{5}{3}$ b) $S = A; \lambda = -\frac{3}{4}$ c) S leží vně $\triangle ABC; \lambda = \frac{2}{3}$
- 9) Sestrojte obraz libovolného lichoběžníku $ABCD$ ve stejnolehlosti se středem v průsečíku jeho úhlopříček a koeficientem $\lambda = \frac{2}{3}$.
- 10) Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište čtverec $MNOP$ tak, aby jeho vrcholy ležely na stranách trojúhelníku ABC .
- 11) Sestrojte společné tečny dvou kružnic s vnějším dotykem, jestliže:
a) jsou obě kružnice shodné
b) kružnice nejsou shodné.
- 12) Je dána kružnice o poloměru 3 cm. Sestrojte obraz této kružnice ve stejnolehlosti $H(S; \lambda)$,
jestliže S leží na obvodu kružnice; $\lambda = -\frac{3}{4}$.
- 13) Je dána kružnice o poloměru 3 cm. Sestrojte obraz této kružnice ve stejnolehlosti $H(S; \lambda)$,
jestliže S leží uvnitř kružnice; $\lambda = \frac{3}{2}$.
- 14) Sestrojte obraz kružnice $m(O, r)$ ve stejnolehlosti $H\left(S, k = -\frac{1}{2}\right)$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury

Výukové materiály a některé úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

E. POMYKALOVÁ: Matematika pro gymnázia Planimetrie. Prometheus, 2005

J. MOLNÁR: Matematika pro střední odborné školy. Prometheus 2011

E. CALDA, O. PETRÁNEK, J. ŘEPOVÁ: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 1. část. Prometheus 2010

P. ČERMÁK, P. ČERVINKOVÁ: Odmaturuj z matematiky 1. Didaktis 2007