

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	DRUHÝ	Mgr. Tomáš MAŇÁK	17. května 2012
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
PLANIMETRIE – ZÁKLADNÍ POJMY			

Planimetrie = geometrie v rovině.

Základními útvary eukleidovské geometrie jsou:

- ✓ bod
- ✓ přímka
- ✓ rovina

Poznámka na okraj:

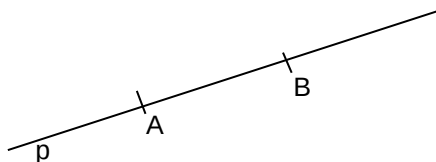
„Bod je to, co nemá délku, šířku, ani výšku. Přímka má jen délku. Rovina má jen délku a šířku.“

Eukleides

Pomocí těchto pojmů lze definovat **množiny bodů na přímce** (např.: polopřímka, úsečka), **v rovině** (např. polorovina, úhel, trojúhelník).

PŘÍMKA A JEJÍ ČÁSTI

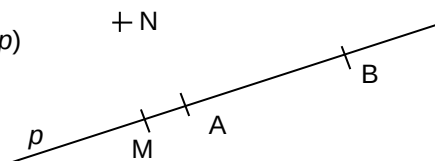
- 1) **Dvěma různými body je určena jediná přímka.**



Symbolický zápis: $p \leftrightarrow AB; A \neq B$

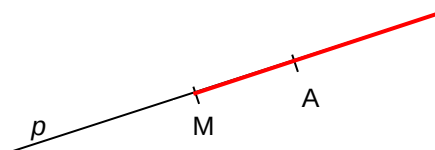
Bod $M \in p$ (M **leží** na přímce p)

Bod $N \notin p$ (N **neleží** na přímce p)



- 2) Libovolný bod, který leží na přímce, ji rozděluje na **dvě navzájem opačné polopřímky**.

Bod $M \in p$; M je **počátek polopřímek** MA ; $A \in p$ a polopřímky opačné k polopřímce MA

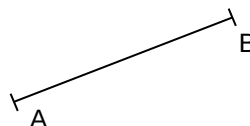


Symbolický zápis: polopřímka $MA = \rightarrow MA$; M je **počátek polopřímky** MA a A je jeden **vnitřní bod této polopřímky**

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3) **Úsečka AB je průnik polopřímek $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$, tj. $AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.**

$A, B \dots$ **krajní body úsečky**

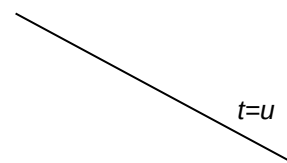
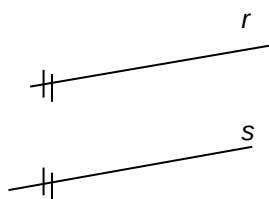
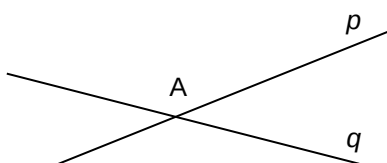


Úsečka je tvořena krajními body AB a všemi svými vnitřními body, tj. body ležícími mezi body A a B . Vzdálenost bodů A, B označujeme jako **délku úsečky AB** a zapisujeme ji $|AB|$.

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK V ROVINĚ

Dvě přímky v rovině mohou být buď:

- ✓ **různoběžné** a pak **mají právě jeden společný bod** (tzv. **průsečík**),
- ✓ **rovnoběžné různé** a pak **nemají žádný společný bod**,
- ✓ **rovnoběžné splývající (totožné přímky)** a pak **mají všechny body společné**.



Symbolický zápis:

různoběžné přímky:

p

$p \cap q = A \dots$ **průsečík přímek**

rovnoběžné různé přímky:

$p \parallel q$

$p \cap q = \emptyset$

rovnoběžné splývající přímky:

$p = q$

$p \cap q = p$

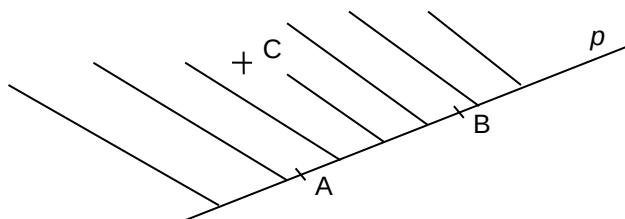


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

POLOROVINA

Libovolná přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné poloroviny.

Přímka p je **hraniční přímkou** obou polorovin tj. poloroviny pC ; $C \in p$ a poloroviny opačné k polorovině pC

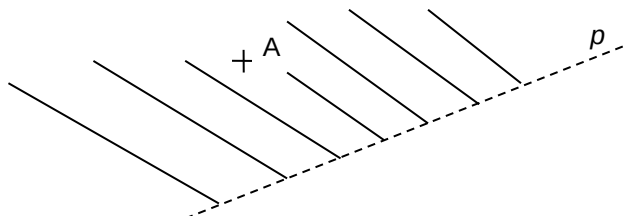


Symbolický zápis: polorovina pC = polorovina ABC = $\mapsto pC$ = $\mapsto ABC$; $p = \leftrightarrow AB$ je hraniční přímka poloroviny a C je bod, který leží v dané polorovině s hraniční přímkou AB

Poznámka:

Pokud každý bod hraniční přímky patří do dané poloroviny, pak je přímka zakreslena plnou čarou.

Pokud hraniční přímka nepatří do dané poloroviny, pak je zakreslena přerušovanou čarou (viz níže).



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

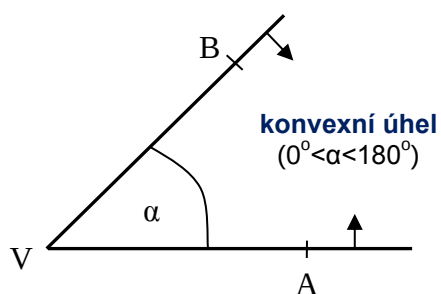
ÚHEL A JEHO VELIKOST

- 1) Jsou-li dány 3 různé body $V \neq A \neq B \neq V$, které neleží v přímce $\Rightarrow$ polopřímky $\mapsto VA; \mapsto VB$ určují **2 úhly**:

konvexní úhel AVB a **nekonvexní úhel AVB**

V ... vrchol úhlu

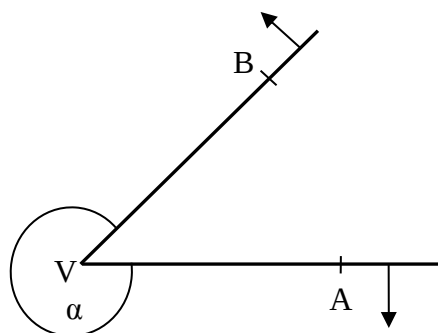
$\mapsto VA; \mapsto VB$... **ramena úhlu**



Konvexní úhel je průnikem dvou polorovin s různoběžnými hraničními přímkami

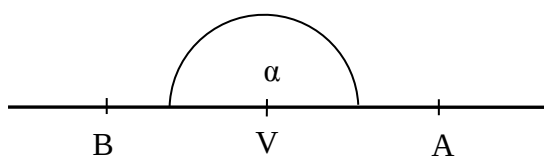
nekonvexní úhel
($180^\circ < \alpha < 360^\circ$)

Nekonvexní úhel je sjednocením dvou polorovin s různoběžnými hraničními přímkami



Úhel je část roviny, která je ohraničena dvěma různými polopřímkami se společným počátkem.

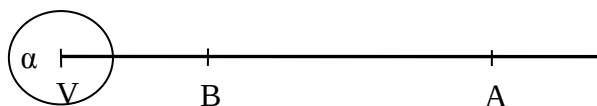
- 2) Jsou-li polopřímky $\mapsto VA; \mapsto VB$ opačné $\Rightarrow$ **přímý úhel**



přímý úhel
($\alpha = 180^\circ$)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 3) Polopřímky $\overrightarrow{VA}; \overrightarrow{VB}$ splývají $\Rightarrow$ **nulový úhel** (jeho všechny body vyplňují polopřímku) nebo **úhel plný** (jeho všechny body vyplňují celou rovinu).

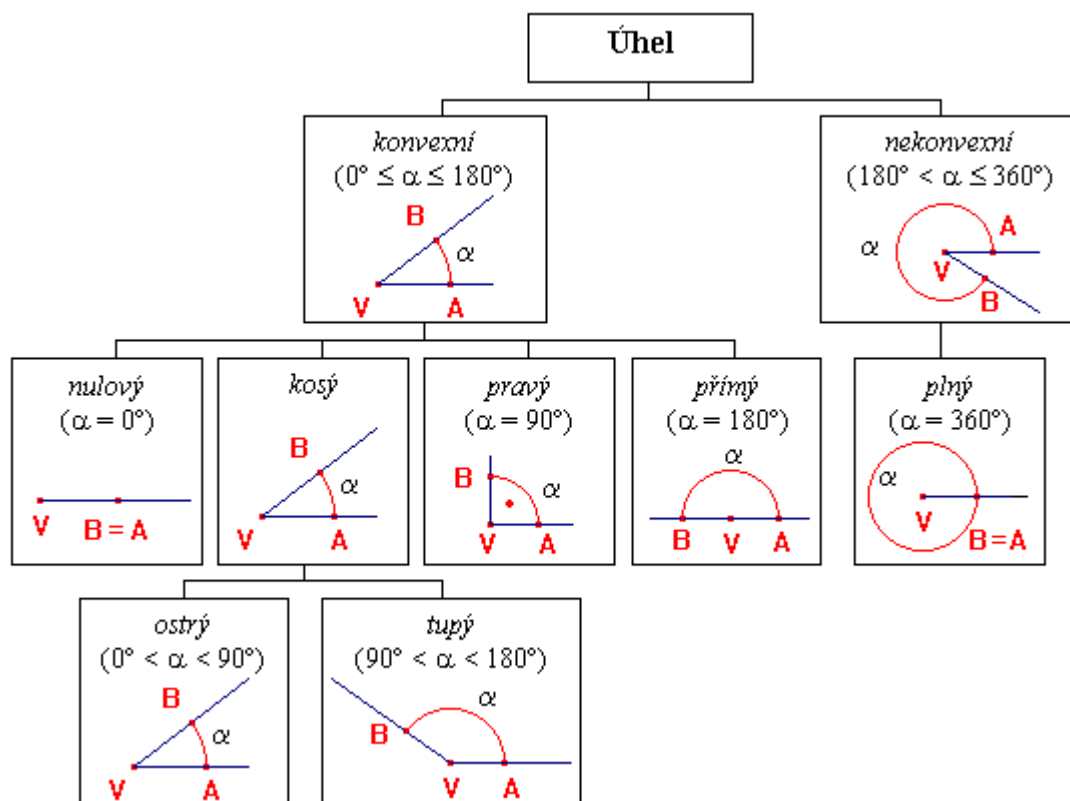


nulový úhel ($\alpha=0^\circ$)

plný úhel ($\alpha=360^\circ$)

Mezi **konvexní úhly** řadíme: **úhel nulový** ($\alpha=0^\circ$), **kosý – úhel ostrý** ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) a **úhel tupý** ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), **pravý** ($\alpha=90^\circ$), **přímý** ($\alpha=180^\circ$), **plný** ($\alpha=360^\circ$).

Shrnutí:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Velikost úhlu vyjadřujeme nejčastěji ve stupních, případně v radiánech.

Stupňová míra:

Jednotka ... **1° (stupeň)**

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

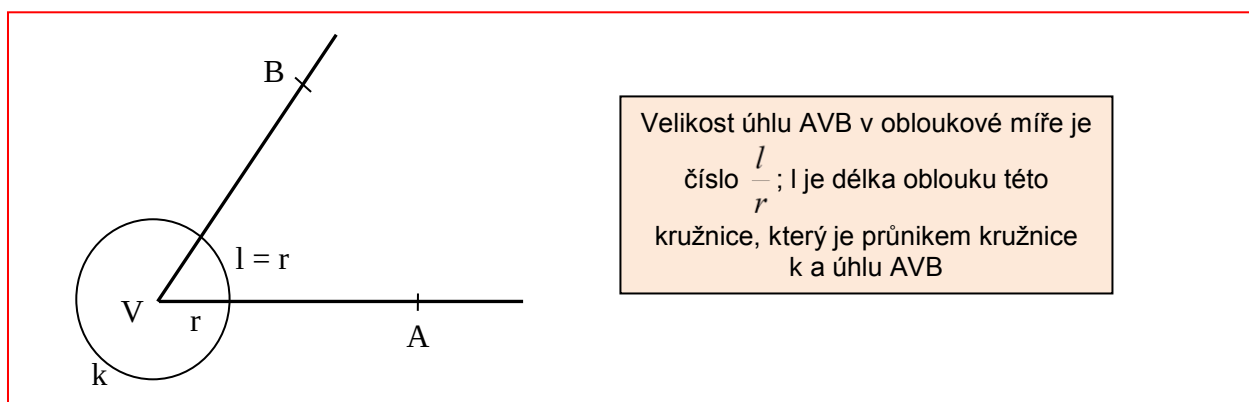
Př. $25,4^\circ = 25^\circ 24'$; $0,4^\circ = 0,4 \cdot 60 = 24'$ (jedna desetina stupně = 6 minut)

Jednotkový úhel velikosti 1 stupeň je úhel, který vznikne rozdělením přímého úhlu na 180 shodných úhlů.

Oblouková míra:

Jednotka ... **1 radián (1 rad))**

1 radián je velikost takového středového úhlu, kterému na jednotkové kružnici odpovídá oblouk délky 1.



Poznámka: *Jednotková kružnice je kružnice s poloměrem o velikosti jedna.*

Pamatuj !!!

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

Otázka: *Kolik stupňů představuje 1 radián?*

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 180^\circ & \dots\dots\dots \pi \text{ (rad)} \\ & \alpha^\circ & \dots\dots\dots 1 \text{ (rad)} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1 \text{ (rad)} \approx 57,29578^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PŘEVODOVÉ VZORCE

α ... úhel ve stupních

x ... úhel v radiánech

převod z radiánů na stupně ... $\alpha^\circ = \frac{x \text{ (rad)} \cdot 180}{\pi}$

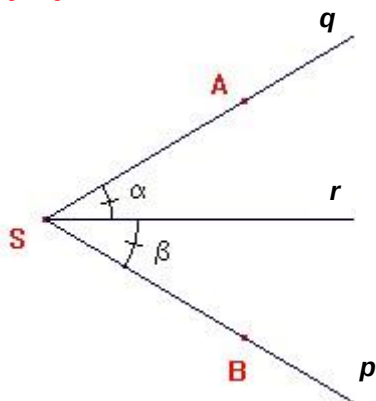
převod ze stupňů na radiány ... $x \text{ (rad)} = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180}$

stupně	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	270°	300°	330°	360°
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

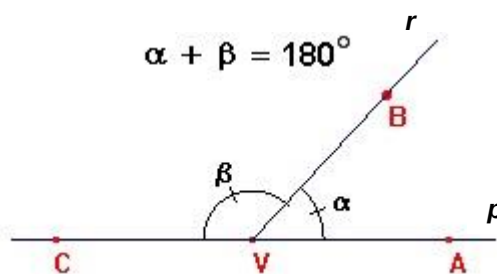
NÁZVY ÚHLŮ PODLE POLOHY

<http://it.pedf.cuni.cz/~proch/program/uhel.htm>

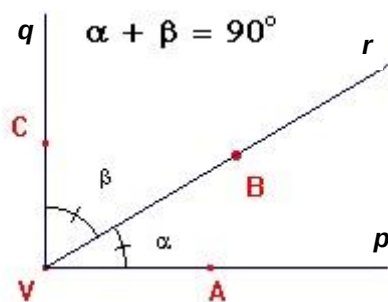
Úhly styčné:



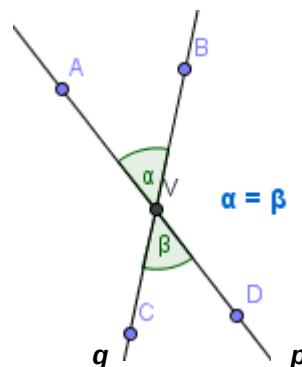
Úhly vedlejší:



Úhly doplňkové:

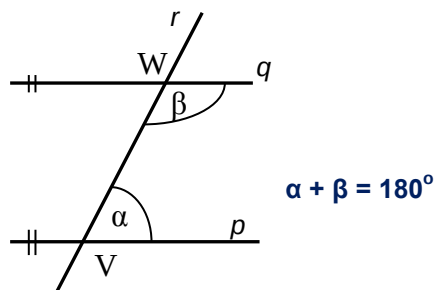
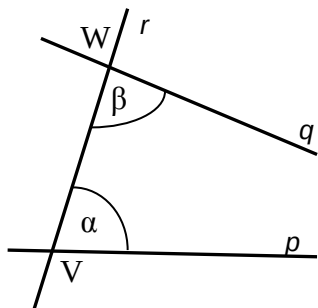


Úhly vrcholové:

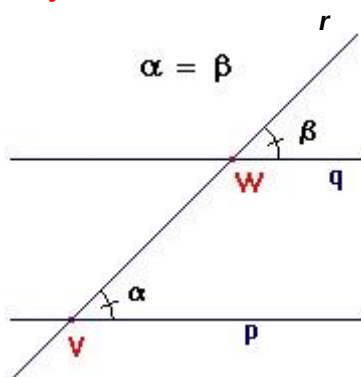


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

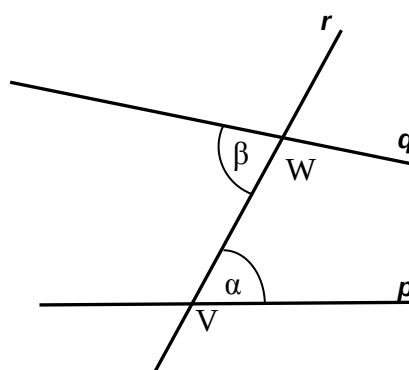
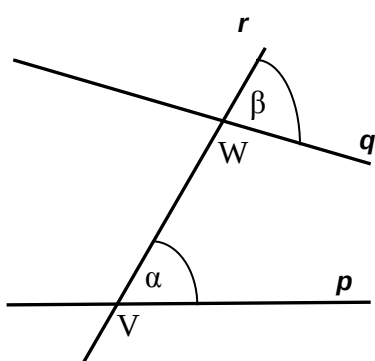
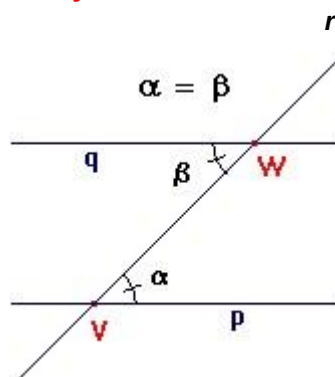
Úhly přilehlé:



Úhly souhlasné:



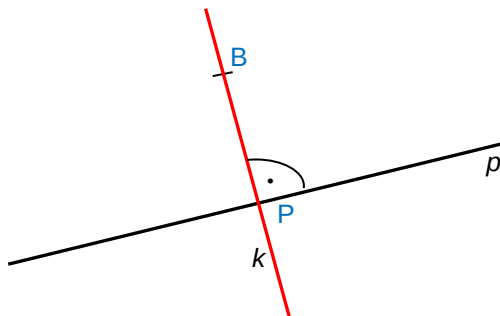
Úhly střídavé:



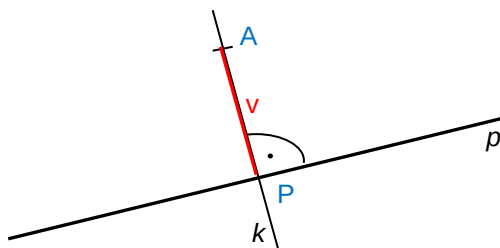
Poznámka: Kružítkem a pravítkem umět sestavit úhly o velikostech 90° , 60° , 30° , 45° , $22,5^\circ$ a jejich násobky.

KOLMOST PŘÍMEK

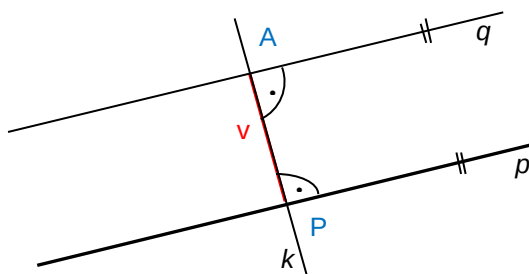
K dané přímce p lze vést daným bodem B jedinou kolmicí k .



Vzdálenost bodu A od přímky p – je délka úsečky (kolmice) AP , a to od **paty kolmice** P k bodu A .
Leží-li bod A na přímce p ($A \in p$), pak vzdálenost bodu A od přímky p je 0 $v(A, p) = |Ap| = |AP| = 0$



Vzdálenost dvou rovnoběžek – je vzdálenost libovolného bodu A jedné přímky od druhé přímky.
Je-li $p = q \Rightarrow v(p, q) = 0$

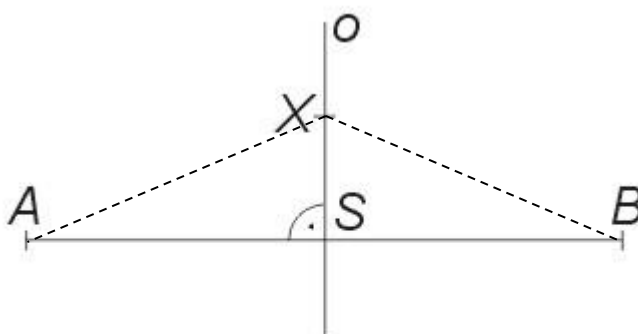


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

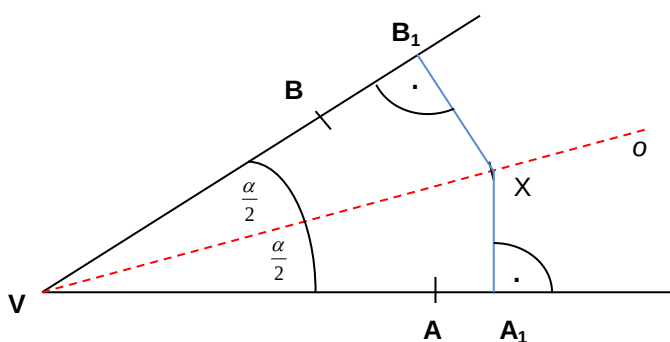


Osa úsečky – je přímka, která prochází středem úsečky a je k ní kolmá. Každý bod úsečky má od krajních bodů úsečky stejnou vzdálenost, tj. $o = \{X \in \rho, |AX| = |BX|\}$

<http://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9Ase%C4%8Dka>



Osa úhlu – je polopřímka s počátkem ve vrcholu úhlu, která pólí daný úhel. Každý bod osy úhlu je stejně vzdálen od jeho ramen tj. $o = \{X \in \rho, v(X; \rightarrow VA) = v(X; \rightarrow VB)\}$





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

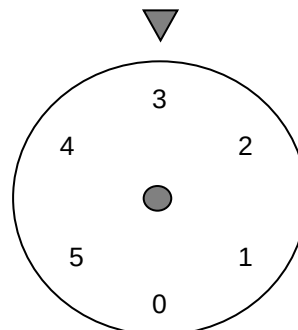
Úlohy k procvičování:

- 1) Ukažte příklady a modely úseček, polopřímek, přímek, rovnoběžných a různoběžných přímek, kolmých přímek, osy úsečky a osy úhlu.
- 2) Které dvě úsečky, dvě polopřímky, dvě přímky považujeme za shodné?
- 3) Který z následujících výroků je pravdivý:
 - A: Jsou-li dvě úsečky shodné, pak mají stejnou délku
 - B: Délkou úsečky je vzdálenost jejích krajních bodů.
 - C: Jsou-li dvě úsečky KL a MN shodné, pak $L = N$.
- 4) Symbolicky запиšte:
 - a) bod B leží na polopřímce AC
 - b) úsečka AC je částí polopřímky BF
 - c) bod B neleží na úsečce AC
 - d) úsečka BA neleží na polopřímce CF
 - e) polopřímka CB nemá s polopřímkou AF žádný společný bod
 - f) úsečky AC a BD mají jediný společný bod C
 - g) přímka AC splývá s přímkou BF
- 5) Symbolicky запиšte:
 - a) úsečka CD leží v polorovině ABE
 - b) polopřímka GD neleží v polorovině ABE
 - c) bod E leží v polorovině CDA
 - d) bod F neleží v polorovině CDE
 - e) polorovina CGB splývá s polorovinou CDE
 - f) přímka q leží v obou polorovinách ABE a ACG
- 6) Určete velikost konvexního úhlu, který na kompasu svírá se směrem V směr:
 - a) SV,
 - b) SSV,
 - c) SZZ.
- 7) Zvolte čtyři různé body A, B, C, D, z nichž žádné tři neleží v téže přímce:
 - a) Zapište všechny poloroviny, které jsou určeny třemi z daných bodů.
 - b) Určete průnik polopřímky AB a poloroviny ABC; polorovin ABD a BAD; poloroviny ABC a poloroviny opačné k polorovině ABC
- 8) Je dána přímka a čtyři různé body, které na ní neleží. Kolik úseček vytvořených dvojicemi těchto bodů protne danou přímku?
- 9) Pro který bod platí, že leží v obou opačných polorovinách?
- 10) Jak můžeme definovat úhel velikosti 1° ?
- 11) Jaké dva úhly považujeme za shodné?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 12) Regulátorem teploty vaříče lze otáčet jen ve směru pohybu hodinových ručiček. V poloze 0 je vaříč vypnutý, v poloze 5 je nastaven na největší teplotu (viz obrázek). O jaký úhel se regulátor otočí, když se teplota nastavuje:

- a) z 0 na 4
b) z 1 na 3



- 13) O jaký úhel se otočí minutová ručička na hodinách za:

- a) jednu hodinu,
b) půl hodiny,
c) deset minut,
d) jednu minutu?

- 14) Představte si, že úhel o velikosti $1^{\circ}35'$ pozorujete dvojnásobně zvětšující lupou. Udejte ve stupních a minutách velikost tohoto úhlu pod lupou.

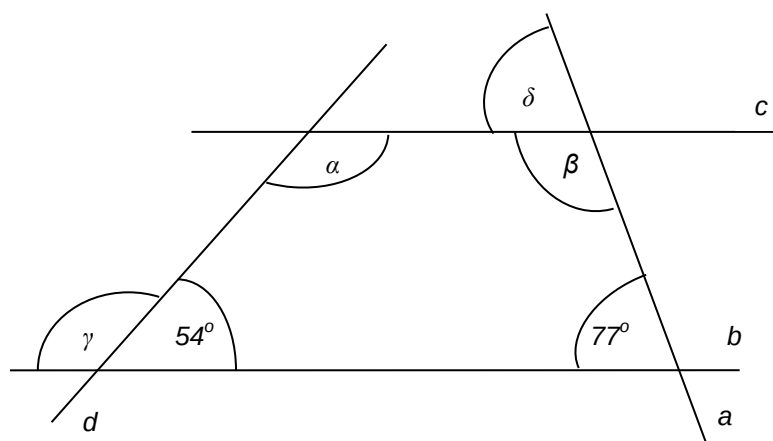
- 15) Načrtněte úhel ostrý, tupý, konvexní, dvojici úhlů styčných, vedlejších, vrcholových.

- 16) Kolik dvojic:

- a) vedlejších úhlů,
b) vrcholových úhlů
určují dvě různoběžné přímky?

- 17) Jak určíte sever za slunečného dne pomocí ručičkových hodinek v zimě a v létě? (pozor na letní čas)

- 18) Určete velikosti úhlů α , β , γ , δ





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zdroje použité literatury a obrázků:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

J. Molnár: Matematika pro střední odborné školy – Planimetrie, Prometheus 2011

E. Pomykalová: Matematika pro gymnázia – Planimetrie, Prometheus 2007

E. Calda, O. Petránek, J. Řepová: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – 1. část, Prometheus 2010

www.google.cz

www.it.pedf.cuni.cz

www.bartweb.cz

www.aktualne.centrum.cz

www.e-photo.cz

www.idnes.cz

<http://cs.wikipedia.org/wiki/>