

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	DRUHÝ	VĚRA JÜTTNEROVÁ	15. 12. 2013
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST, MOCNINNÁ FUNKCE, INVERZNÍ FUNKCE			

NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

Nepřímá úměrnost je každá funkce daná rovnicí $y = \frac{k}{x}; x \in \mathbb{R} - \{0\}, k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Definiční obor: $D(f) \in \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

Obor hodnot: $H(f) \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$y = \frac{k}{x} \quad / \cdot x$$

$$x = \frac{k}{y}$$

$$y \neq 0$$

Grafem nepřímé úměrnosti je **hyperbola**.

Úloha:

Sestrojte do jednoho souřadného systému grafy funkcí $f: y = \frac{k}{x}$ pro $k = 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, -\frac{1}{2}$.

Využijte přitom následující tabulky a doplňte v ní údaje potřebné k sestrojení grafů.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$y = \frac{2}{x}$								
$y = \frac{1}{2x}$								
$y = -\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$y = -\frac{2}{x}$								
$y = -\frac{1}{2x}$								

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$k > 0$$

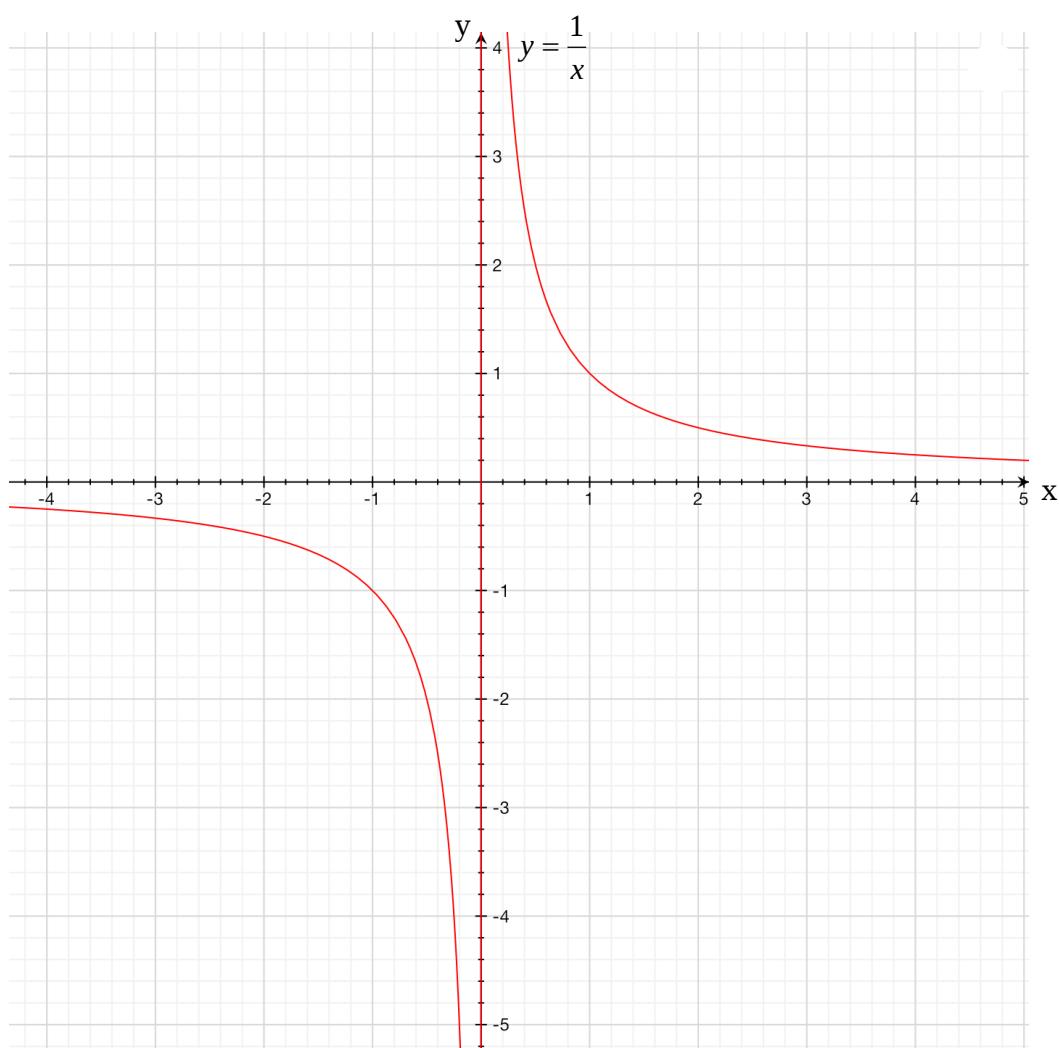
Řešení:

Je-li $k = 1 \Rightarrow$ jde o funkci $y = \frac{1}{x}$

V tabulce doplníme hodnoty y pro dané hodnoty x (viz 2. řádek) a sestojíme graf funkce (viz obr.)
Doplňte předpis funkce a údaje ve výše uvedené tabulce a pak sestojte grafy do téhož souřadného systému:

Je-li $k = 2 \Rightarrow$ jde o funkci _____

Je-li $k = \frac{1}{2} \Rightarrow$ jde o funkci _____



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$k < 0$$

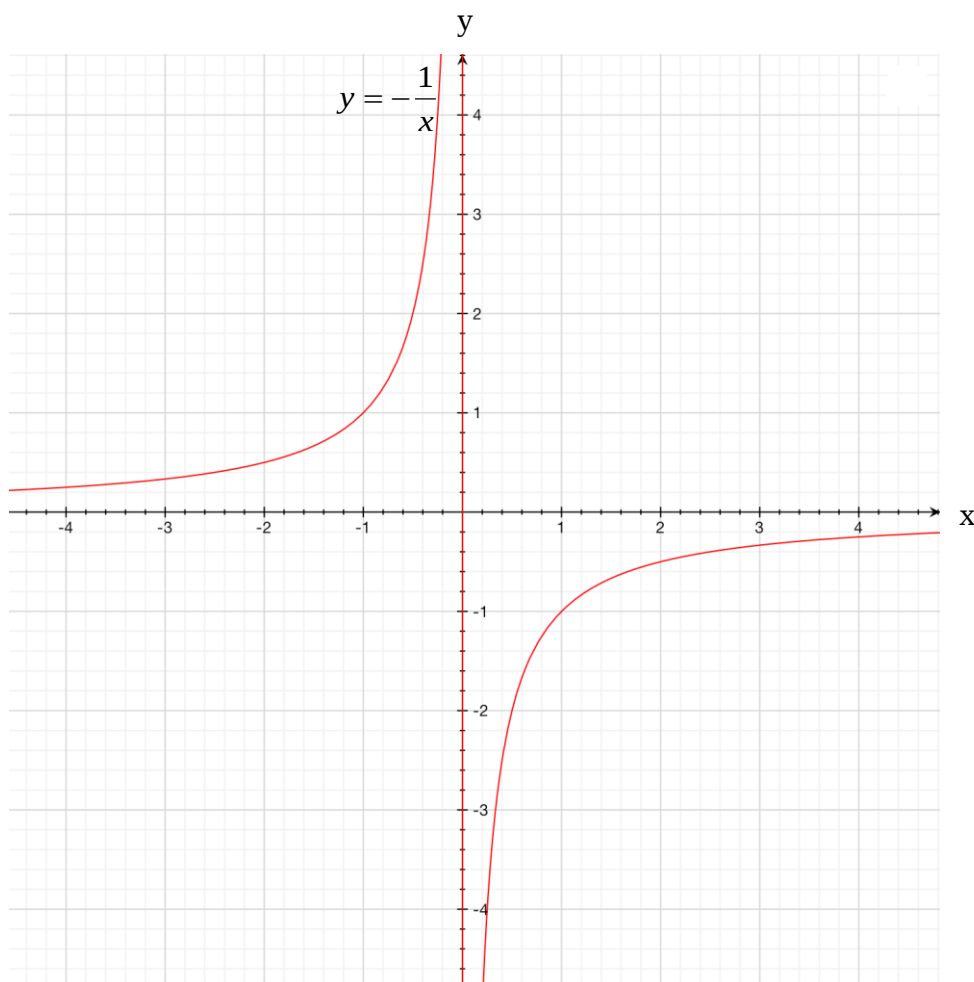
Řešení:

Je-li $k = -1 \Rightarrow$ jde o funkci $y = -\frac{1}{x}$

V tabulce doplníme hodnoty y pro dané hodnoty x (viz 5. řádek) a sestojíme graf funkce (viz obr.)
Doplňte předpis funkce a údaje ve výše uvedené tabulce a pak sestojte grafy do téhož souřadného systému:

Je-li $k = -2 \Rightarrow$ jde o funkci _____

Je-li $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ jde o funkci _____



Závěr:

Pro $k > 0$ je funkce lichá, klesá v intervalu $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Pro $k < 0$ je funkce lichá, roste v intervalu $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Osa x a osa y jsou asymptoty hyperboly, tj. přímky, ke kterým se hyperbola neomezeně přibližuje, ale nikdy se s nimi neprotne a ani se jich nedotkne.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešený příklad 1:

Ozubené kolo o průměru d mm vykoná n otáček za minutu a zasahuje do jiného ozubeného kola o průměru 200 mm, které se otočí za minutu 8 krát. Najděte funkci, která udává závislost n na d .

Řešení:

Jde o nepřímou úměru. Čím větší je průměr ozubeného kola, tím vykoná kolo méně otáček za jednu minutu.

↑	1. průměr ozubeného kola d mm n otáček / 1 min	↓
	2. průměr ozubeného kola 200 mm 8 otáček / 1min	

$$\frac{n}{8} = \frac{200}{d} \quad / \cdot 8$$

$$n = \frac{200}{d} \cdot 8$$

$$n = \frac{1600}{d}; \quad d \in (0; \infty)$$

Řešený příklad 2:

Ozubené kolo má 105 zubů a otočí se 22 krát za minutu.

- Kolik zubů má druhé kolo soukolí, otáčí-li se 6 krát za minutu?
- Kolikrát se otočí třetí kolo soukolí zapadajícího do prvního kola, má-li 154 zubů?

Řešení:

Jde o nepřímou úměru.

a)	↑	105 zubů 22 ot/min	↓
		x zubů 6 ot/min	

$$\frac{x}{105} = \frac{22}{6} \quad / \cdot 105$$

$$x = \frac{22}{6} \cdot 105$$

$$x = 385 \text{ zubů}$$

Druhé kolo soukolí má 385 zubů.

b)	↓	105 zubů 22 ot/min	↑
		154 zubů x ot/min	

$$\frac{x}{22} = \frac{105}{154} \quad / \cdot 22$$

$$x = \frac{105}{154} \cdot 22$$

$$x = 15 \text{ ot/min}$$

Třetí kolo soukolí se otočí 15 krát za minutu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešený příklad 3:

Určete interval, v němž je funkční hodnota funkce $y = \frac{4}{x}$ menší než 0,7.

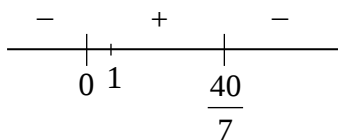
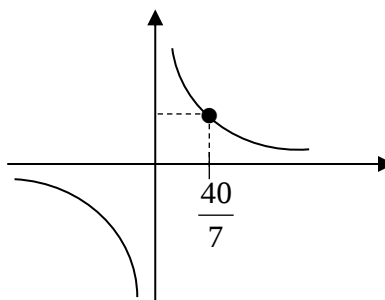
Řešení:

$$\frac{4}{x} < 0,7$$

$$\frac{4}{x} < \frac{7}{10}$$

$$\frac{4}{x} - \frac{7}{10} < 0$$

$$\frac{40 - 7x}{10x} < 0$$



$$x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{40}{7}; \infty\right)$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST A

Příklad 1:

Je dána funkce $k : y = \frac{3}{2x}$. Určete $k(1), k(-1), k(2), k(-2), k(3), k(-3), k\left(-\frac{1}{2}\right), k\left(\frac{1}{2}\right), k\left(\frac{1}{4}\right), k\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Sestrojte příslušné uspořádané dvojice v kartézské soustavě souřadnic. Potom sestrojte graf funkce k .



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2:

Sestrojte grafy následujících funkcí.

Návod: vyjděte z grafů funkcí $y = \frac{1}{x}$ a $y = -\frac{2}{x}$ a užíjte vhodného posunutí.

a) $f: y = \frac{1}{x} + 2$

b) $g: y = -\frac{2}{x} - 1$

Příklad 3:

Žáci druhého ročníku gymnázia se rozhodli v rámci zlepšování životního prostředí vysadit v okolí školy 100 okrasných keřů. Určete, kolik keřů musí každý z nich průměrně vysadit, zúčastní-li se brigády 11, 20 nebo všech 35 žáků? Potom určete funkci vyjadřující závislost počtu keřů, které musí vysadit průměrně jeden brigádník, na počtu žáků, kteří se brigády zúčastní.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 4:

Vzdálenost mezi městy A, B je 430 km. Určete funkci, která udává závislost doby jízdy automobilu z města A do města B na jeho průměrné rychlosti. Předpokládejte, že minimální rychlost jízdy je 30 km/h a maximální rychlost jízdy je 80 km/h. Sestrojte graf této funkce. Z grafu pak určete přibližnou dobu jízdy pro průměrnou rychlost 40 km/h a 76 km/h.

Příklad 5:

V rovnici $y = \frac{k}{x}$ určete k tak, aby graf funkce procházel bodem $D = [-5; -8]$.

Příklad 6:

Automobil jedoucí rychlostí 50 km/h ujede určitou dráhu za 2,5 hodiny. Vypočítejte:

- Za jak dlouho ujede automobil tuto dráhu rychlostí 70 km/h.
- Jakou rychlostí musí automobil jet, aby tuto vzdálenost projel za 2 hodiny.

Příklad 7:

Skupina 12 stejně výkonných dělníků vykoná určitou práci za 40 dní. Vyjádřete, jak bude záviset počet dní x , kdy je tato práce vykonána, na počtu dělníků y .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

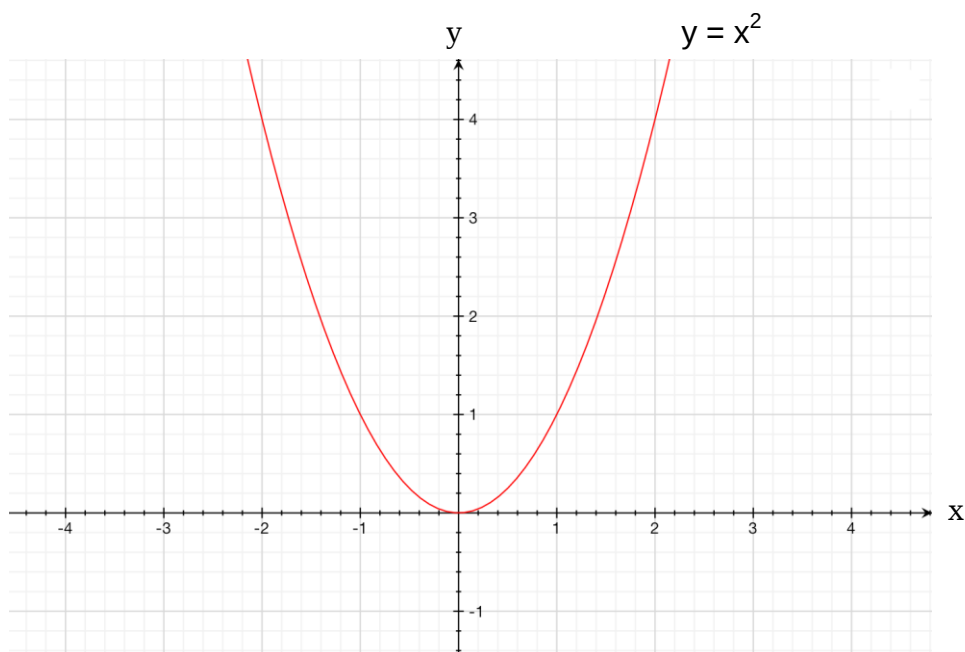
MOCNINNÁ FUNKCE

Mocninná funkce je každá funkce daná rovnicí $y = a \cdot x^n$; $a \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}$

I. $y = x^n$ $D(f) = \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}^+$

a) n – sudé:

$$y = x^2; y = x^4; y = x^6 \dots$$



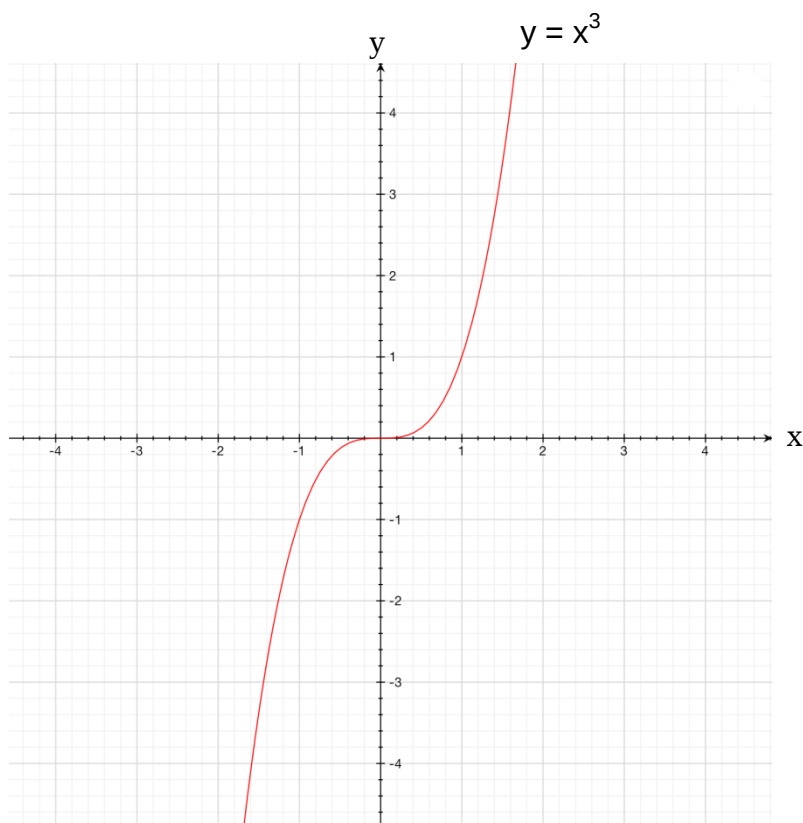
Vlastnosti funkce:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $H(f) = \langle 0; \infty \rangle = \mathbb{R}^+$
- klesající v intervalu $(-\infty; 0)$
rostoucí v intervalu $\langle 0; \infty \rangle$
- sudá
- zdola omezená

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) n – liché:

$$y = x ; y = x^3 ; y = x^5 \dots$$



Vlastnosti funkce:

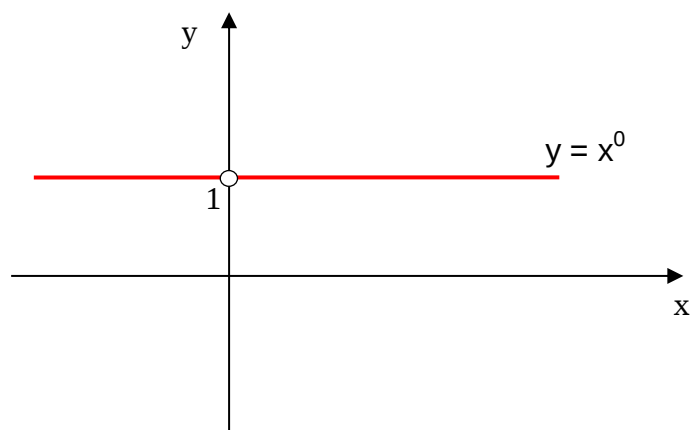
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $H(f) = (-\infty; \infty) = \mathbb{R}$
- rostoucí v množině $\mathbb{R}$ (v celém svém definičním oboru)
- lichá
- není omezená

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

II. $y = x^0$ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$; tj. $n = 0$

0^0 je neurčitý výraz !!!

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: x^0 = 1 \Rightarrow y = 1$ jde o konstantní funkci



III. $y = x^k$; $k \in \mathbb{Z}^-$

$k = -n$; $n \in \mathbb{Z}^+$

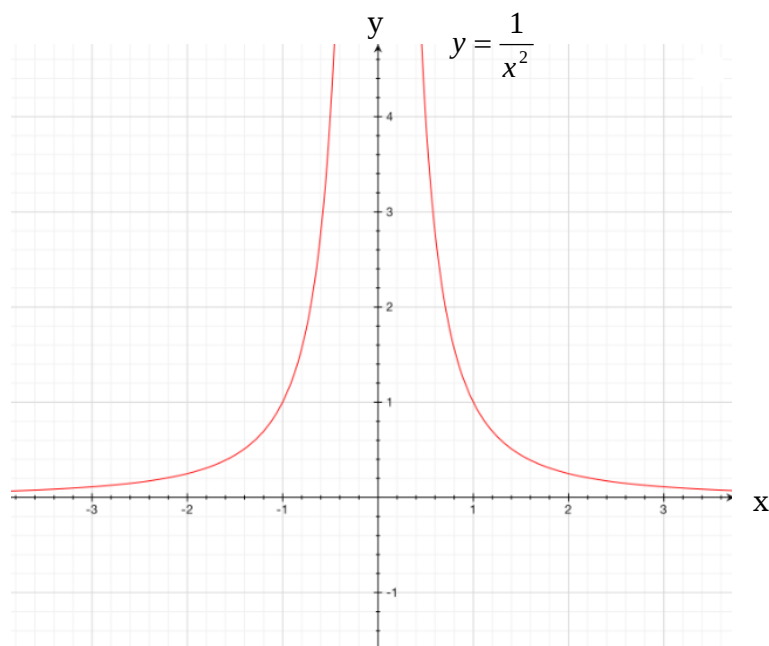
$y = x^{-n}$ $n \in \mathbb{Z}^+$

$y = \frac{1}{x^n}$ $x \neq 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

a) n – sudé:

$$y = \frac{1}{x^2}; y = \frac{1}{x^4}; y = \frac{1}{x^6} \dots$$



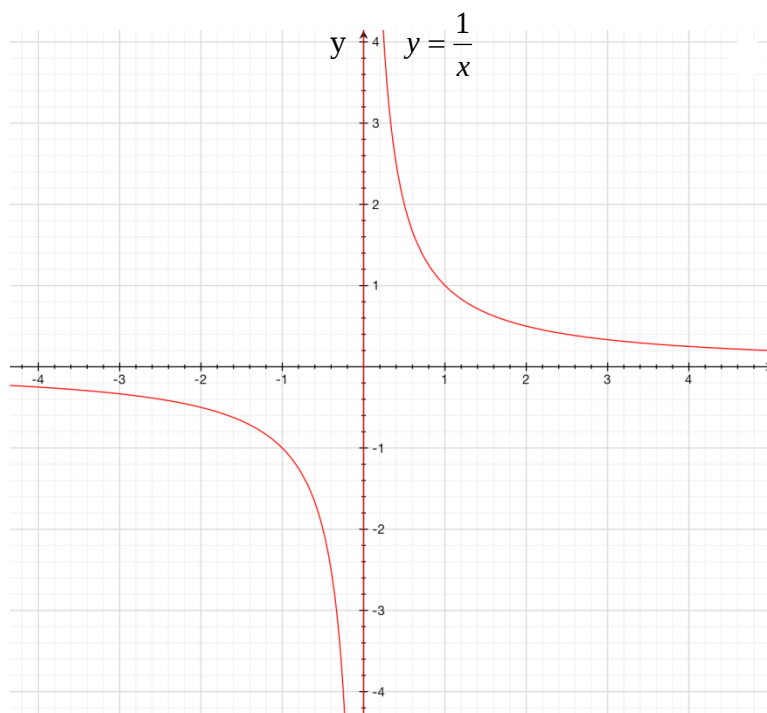
Vlastnosti funkce:

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $H(f) = (0; \infty) = \mathbb{R}^+$
- rostoucí v intervalu $(-\infty; 0)$
klesající v intervalu $(0; \infty)$
- sudá
- zdola omezená

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) n – liché:

$$y = \frac{1}{x}; y = \frac{1}{x^3}; y = \frac{1}{x^5} \dots$$



Vlastnosti funkce:

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $H(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- klesající v celém definičním oboru, tj. v intervalu $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- lichá

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST B

Příklad 1:

Porovnejte podle velikosti následující mocniny. Využijte přitom znalostí o grafu mocninné funkce:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \square \left(\frac{1}{4}\right)^5$

2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 \square \left(-\frac{1}{4}\right)^5$

3) $(-0,025)^6 \square (-0,3)^6$

4) $0,7^4 \square (-0,7)^4$

5) $(-1)^5 \square (-1)^6$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2:

Porovnejte podle velikosti následující mocniny. Využijte přitom znalostí o grafu mocninné funkce:

1) $(-0,5)^{-2}$ $(0,5)^{-2}$

2) $(-2,3)^{-3}$ $(2,3)^{-3}$

3) $(4,8)^{-4}$ $(4,9)^{-4}$

4) $(-4,8)^{-4}$ $(-4,9)^{-4}$

5) $(-1)^5$ $(-1)^6$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3:

Načrtněte grafy funkcí:

a) $y = \frac{1}{2}x^3$

b) $y = x^4 - 1$

c) $y = -2x^5$

INVERZNÍ FUNKCE

Je-li f funkce, pak symbolem f^{-1} budeme označovat množinu uspořádaných dvojic $[y; x] \in R \times R$, pro které platí: $[y; x] \in f^{-1} \Leftrightarrow [x; y] \in f$.

Řešený příklad 1:

Je dána funkce $m = \{[-3; 3], [-2; -2], [1; 2], [2; 4], [3; 2]\}$. Určete množinu m^{-1} .

Řešení:

Zaměníme složky uspořádaných dvojic $\Rightarrow m^{-1} = \{[3; -3], [-2; -2], [2; 1], [4; 2], [2; 3]\}$

Závěr:

1. Množina m^{-1} **není funkce**, neboť číslu 2 jsou přiřazena dvě různá čísla: 1 a 3
2. Množina m je funkce, ale není prostá, protože nesplňuje podmínku:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$1 \neq 3 \Rightarrow 2 = 2$$

Definice:

Necht' f je funkce. Množina f^{-1} je funkcí právě tehdy, když funkce f je prostá.

Necht' f je funkce prostá, pak f^{-1} je funkce a nazývá se inverzní funkcí k funkci f .

Řešený příklad 2:

K funkci $f: y = 3x + 5$ najděte množinu f^{-1} a rozhodněte, zda je to funkce. Zobrazte grafy obou funkcí do téhož souřadnicového systému.

Řešení:

Funkci můžeme zapsat jako množinu uspořádaných dvojic:

$$f = \{[0; 5], [1; 8], [-1; 2], \dots\}$$

Záměnou proměnných dostaneme inverzní množinu:

$$f^{-1} = \{[5; 0], [8; 1], [2; -1], \dots\}$$

Funkce $f: y = 3x + 5$ je prostá, protože je to funkce rostoucí $\Rightarrow$ množina f^{-1} bude inverzní funkcí k funkci f .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

a) Určíme inverzní funkci k funkci $f : y = 3x + 5$:

1. *Provedeme záměnu proměnných* $x \leftrightarrow y$:

$$\Rightarrow x = 3y + 5$$

2. *Vyjádříme* y :

$$3y = x - 5 \Rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{5}{3}$$

Dostaneme inverzní funkci: $f^{-1} : y = \frac{x}{3} - \frac{5}{3}$

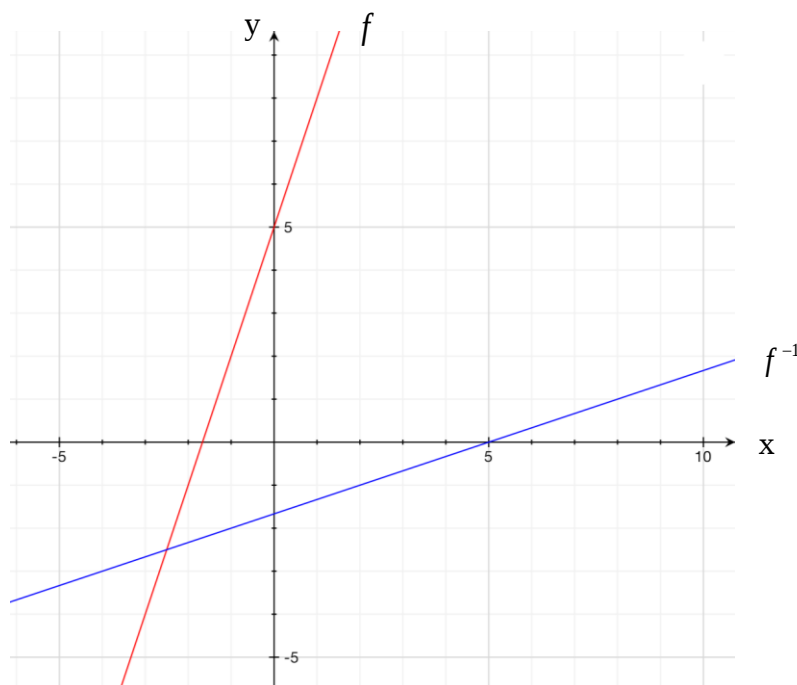
b) Sestrojíme grafy obou funkcí:

$f :$

x	-1	0
y	2	5

$f^{-1} :$

x	2	5
y	-1	0





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST C

Příklad 1:

Je dána funkce $f : y = \frac{1}{2}x + 2; x \in \langle -2; 3 \rangle$. Zobraďte tuto funkci i funkci f^{-1} do téhož souřadnicového systému. Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

Příklad 2:

Je dána funkce $f : y = \frac{1}{3}x - 3; x \in (-2; 1)$. Určete definiční obor a obor hodnot dané funkce i funkce k ní inverzní. Sestrojte grafy obou funkcí do téhož souřadnicového systému.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3:

Sestrojte v téže kartézské soustavě graf funkce $f : y = -x^2 + 1; x \in \langle 0; 2 \rangle$ a graf funkce k ní inverzní.

Příklad 4:

Rozhodněte, zda dané dvojice jsou dvojicemi inverzních funkcí

a) $u_1 : y = -2x^2 + 5; x \in (1; \infty)$

$$v_1 : y = \sqrt{\frac{1}{2}(5 - x)}; x \in (-\infty; 3)$$

b) $u_2 : y = 2x - 4$

$$v_2 : y = \frac{1}{2}x + 2$$

c) $u_3 : y = 2x^2 - 3; x \in \langle 0; 3 \rangle$

$$v_3 : y = \sqrt{\frac{1}{2}(x + 3)}; x \in \langle -3; 15 \rangle$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 5:

Zakreslete do téhož souřadnicového systému graf funkce $f : y = x^2; x \geq 0$ a funkce f^{-1} a určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

Seznam použité literatury a internetových zdrojů

Výukové materiály a některé úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

O. ODVÁRKO: Matematika pro gymnázia Funkce. Prometheus, 2005

J. PETÁKOVÁ: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus, 1998

P. BOUCNÍK, P. ČERMÁK, P. ČERVINKOVÁ: Od maturuj z matematiky 1. Didaktis 2004

P. BOUCNÍK, J. HERMAN, P. KRUPKA, J. ŠIMŠA: Od maturuj z matematiky 3. Didaktis 2004