



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## GONIOMETRIE

### Velikost úhlu v obloukové a stupňové míře:

#### Stupňová míra:

Jednotka ...  $1^\circ$  (stupeň)

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

$$\text{Př. } 25,4^\circ = 25^\circ 24'$$

jeden stupeň = 60 minut = 3600 vteřin

$$0,4^\circ = 0,4 \cdot 60 = 24'$$

#### Oblouková míra:

Jednotka ... 1 radián

1 radián je velikost takového středového úhlu, kterému na jednotkové kružnici odpovídá oblouk délky 1.

Poznámka: Jednotková kružnice je kružnice s poloměrem o velikosti jedna.

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow 360^\circ \dots\dots 2\pi \text{ rad} \\ \uparrow \alpha^\circ \dots\dots 1 \text{ rad} \end{array}$$

$$\alpha^\circ = \frac{1 \cdot 360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$$

$$1 \text{ rad} \approx 57,29578^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

#### Převodové vzorce:

$\alpha$  ... úhel ve stupních

$\beta$  ... úhel v radiánech

$$\text{převod z radiánů na stupně} \dots \alpha = \frac{\beta \cdot 180}{\pi}$$

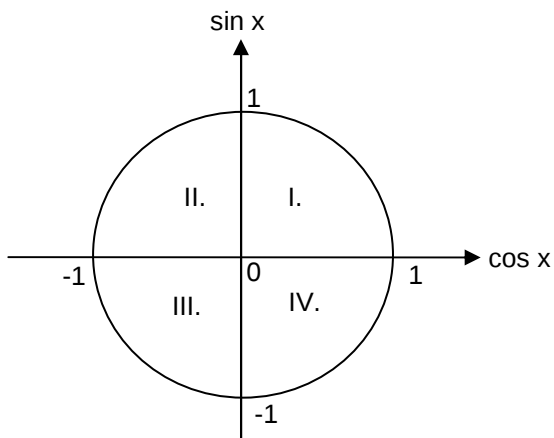
$$\text{převod ze stupňů na radiány} \dots \beta = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$$

| stupně  | $30^\circ$      | $45^\circ$      | $60^\circ$      | $90^\circ$      | $120^\circ$      | $150^\circ$      | $180^\circ$ | $210^\circ$      | $240^\circ$      | $270^\circ$      | $300^\circ$      | $330^\circ$       | $360^\circ$ |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------|
| radiány | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$       | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$      |

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech

**Jednotková kružnice:**



1. kvadrant ...  $(0^\circ, 90^\circ)$
2. kvadrant ...  $(90^\circ, 180^\circ)$
3. kvadrant ...  $(180^\circ, 270^\circ)$
4. kvadrant ...  $(270^\circ, 360^\circ)$

|               | I. | II. | III. | IV. |
|---------------|----|-----|------|-----|
| <b>sin x</b>  | +  | +   | -    | -   |
| <b>cos x</b>  | +  | -   | -    | +   |
| <b>tg x</b>   | +  | -   | +    | -   |
| <b>cotg x</b> | +  | -   | +    | -   |

### Tabulka hodnot goniometrických funkcí

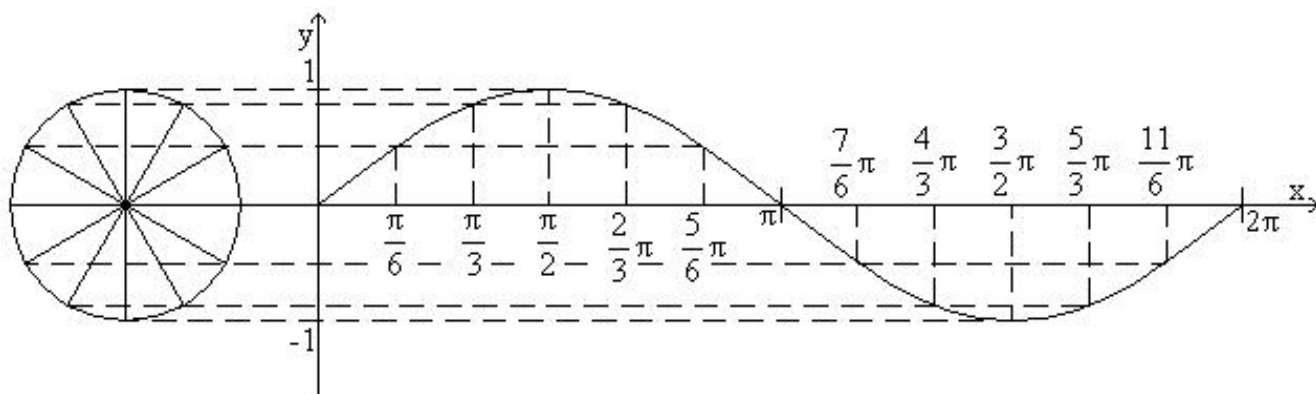
|               | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <b>sin x</b>  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| <b>cos x</b>  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| <b>tg x</b>   | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |
| <b>cotg x</b> | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Vlastnosti goniometrických funkcí

#### Funkce $y = \sin x$

Graf:



Zdroj obr.: [www.vysokeskoly.cz/.../GeometrickéFunkce.htm](http://www.vysokeskoly.cz/.../GeometrickéFunkce.htm)

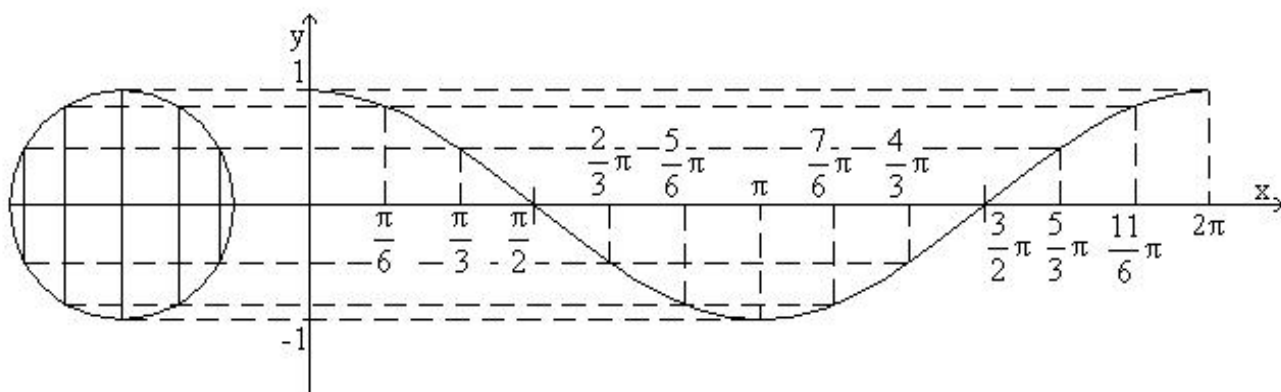
#### Vlastnosti funkce:

- periodická s periodou  $2\pi$  ( $360^\circ$ )
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- rostoucí:  $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- klesající:  $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- lichá funkce:  $\sin(-x) = -\sin(x)$ , graf funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic
- omezená shora i zdola
- má maximum i minimum

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Funkce $y = \cos x$

Graf:



Zdroj obr.: [www.vysokeskoly.cz/.../GeometrickéFunkce.htm](http://www.vysokeskoly.cz/.../GeometrickéFunkce.htm)

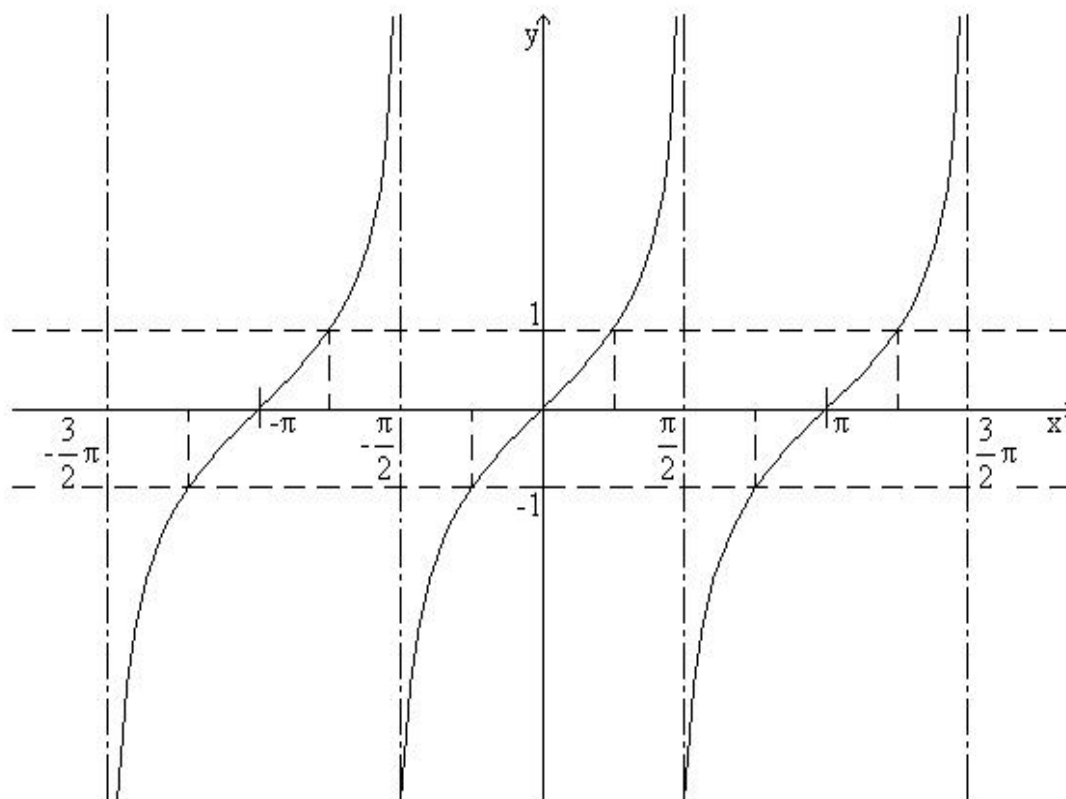
#### Vlastnosti funkce:

- periodická s periodou  $2\pi$  ( $360^\circ$ )
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- rostoucí:  $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$
- klesající:  $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$
- sudá funkce:  $\cos(-x) = \cos(x)$ , graf funkce je souměrný podle osy y
- omezená shora i zdola
- má maximum i minimum

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Funkce $y = \tan x$

Graf:



Zdroj obr.: [www.vysokeskoly.cz/.../GeometrickéFunkce.htm](http://www.vysokeskoly.cz/.../GeometrickéFunkce.htm)

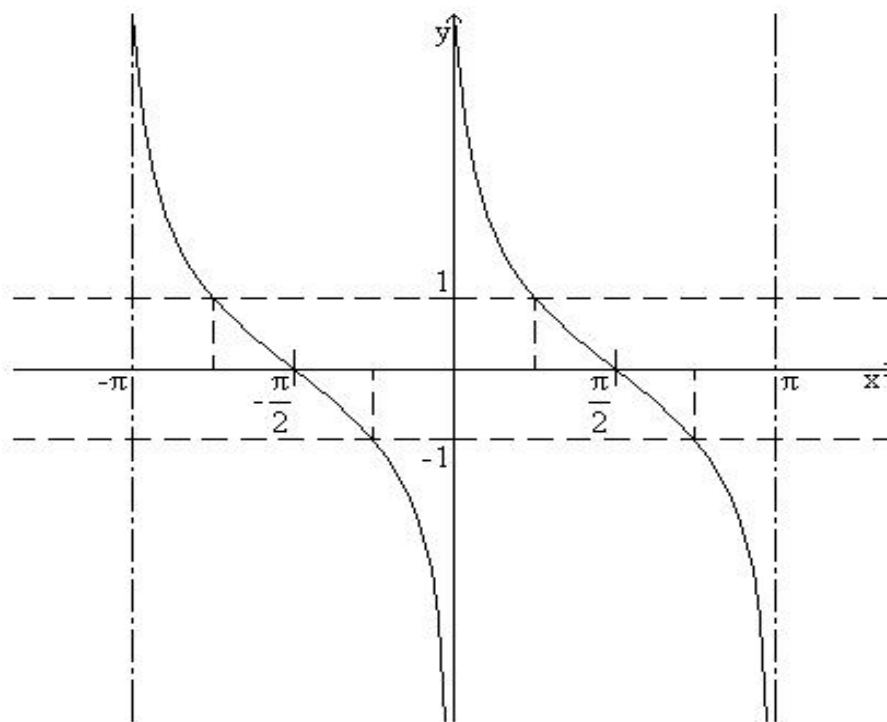
#### Vlastnosti funkce:

- periodická s periodou  $\pi$  ( $180^\circ$ )
- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$
- $H(f) = \mathbb{R}$
- rostoucí:  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$
- lichá funkce:  $\tan(-x) = -\tan(x)$ , graf funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic
- není omezená
- nemá maximum, ani minimum

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Funkce $y = \cotg x$

Graf:



Zdroj obr.: [www.vysokeskoly.cz/.../GeometrickeFunkce.htm](http://www.vysokeskoly.cz/.../GeometrickeFunkce.htm)

### Vlastnosti funkce:

- periodická s periodou  $\pi$  ( $180^\circ$ )
- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$
- $H(f) = \mathbb{R}$
- klesající:  $(k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
- lichá funkce:  $\cot g(-x) = -\cot g(x)$ , graf funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic
- není omezená
- nemá maximum, ani minimum



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### **Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:**

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \operatorname{tg} x = \cot g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \cot g x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \cot g x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \operatorname{tg} x \cdot \cot g x = 1$$

### **Vzorce pro dvojnásobný argument:**

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \cot g 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot g x} \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

### **Vzorce pro poloviční argument:**

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad \left| \cot g \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

### **Součtové vzorce:**

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y & \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y & \cot g(x \pm y) &= \frac{\cot g x \cdot \cot g y \mp 1}{\cot g x \pm \cot g y} \end{aligned}$$

### **Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí:**

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} & \sin x - \sin y &= 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} & \cos x - \cos y &= -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y} & \cot g x \pm \cot g y &= \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y} \end{aligned}$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Goniometrické rovnice

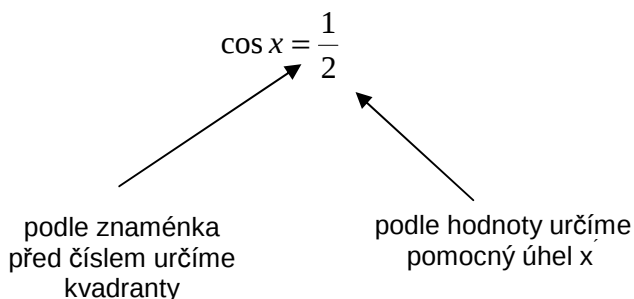
- Jsou rovnice, v nichž se vyskytují goniometrické funkce neznámého úhlu.
- Každý úhel  $x$ , který vyhovuje rovnici, je řešením rovnice.

#### 1. Základní goniometrické rovnice:

##### Řešené úlohy:

**Příklad 1:** Řešte v množině  $\mathbb{R}$  rovnici  $\cos x = \frac{1}{2}$

Řešení:



Do 4. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel odečteme od  $360^\circ$

$$x' = 60^\circ$$

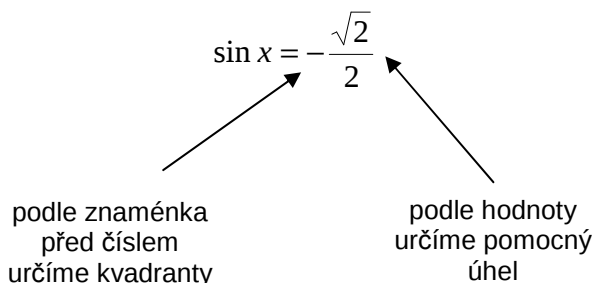
I. kvadrant:  $x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$

IV. kvadrant:  $x_2 = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$

z tabulky zjistíme pomocný úhel  
funkce kosinus je kladná v 1. a 4. kvadrantu  
perioda funkce kosinus je  $360^\circ$

**Příklad 2:** Řešte v množině  $\mathbb{R}$  rovnici  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Řešení:



Do 3. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel přičteme k  $180^\circ$

Do 4. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel odečteme od  $360^\circ$

$$x' = 45^\circ$$

III. kvadrant:  $x_1 = 225^\circ + k \cdot 360^\circ$

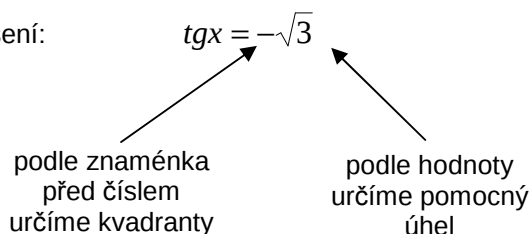
IV. kvadrant:  $x_2 = 315^\circ + k \cdot 360^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$

z tabulky zjistíme pomocný úhel  
funkce sinus je záporná ve 3. a 4. kvadrantu  
perioda funkce sinus je  $360^\circ$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Příklad 3:** Řešte v množině  $\mathbb{R}$  rovnici  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Řešení:



Do 2. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel odečteme od  $180^\circ$

Do 4. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel odečteme od  $360^\circ$

$$x' = 30^\circ$$

$$\text{II. kvadrant: } x_1 = 150^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$\text{IV. kvadrant: } x_2 = 330^\circ + k \cdot 180^\circ$$

z tabulky zjistíme pomocný úhel  
funkce tangens je záporná ve 2. a 4. kvadrantu  
perioda funkce tangens je  $180^\circ$

$$x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

Obě řešení „leží“ na přímce  $\Rightarrow$   
můžeme je nahradit jedním řešením

## 2. Goniometrické rovnice řešené substitucí:

### Řešené úlohy:

**Příklad 1:** Řešte v množině  $\mathbb{R}$  rovnici  $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Řešení:

$$2x = t$$

zavedeme substituci (nahrazení)

$$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

přepíšeme rovnici pomocí substitute

podle znaménka před  
číslem určíme  
kvadranty

podle hodnoty  
určíme pomocný  
úhel

Do 2. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel odečteme od  $180^\circ$

Do 3. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel přičteme k  $180^\circ$

$$x' = 30^\circ$$

$$\text{II. kvadrant: } t_1 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

z tabulky zjistíme pomocný úhel  
funkce kosinus je záporná ve 2. a 3. kvadrantu

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

III. kvadrant:  $t_2 = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$

perioda funkce kosinus je  $360^\circ$

$$2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$$

ze substituce vyjádříme  $x$

$$x_1 = \frac{t_1}{2} \Rightarrow x_1 = 75^\circ + k \cdot 180^\circ$$

do substituce dosadíme zpět za  $t$

$$x_2 = \frac{t_2}{2} \Rightarrow x_2 = 105^\circ + k \cdot 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Příklad 2:** Řešte v množině  $\mathbb{R}$  rovnici  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

Řešení:

$$2x - \frac{\pi}{3} = t$$

zavedeme substituci (nahrazení)

$$\sin t = -1$$

přepíšeme rovnici pomocí substituce

$$t = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$$

úhel zjistíme z jednotkové kružnice  
perioda funkce sinus je  $360^\circ$

$$2x - \frac{\pi}{3} = t \Rightarrow 2x = t + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}$$

do substituce dosadíme zpět za  $t$

$$x = 135^\circ + k \cdot 60^\circ$$

### 3. Další typy goniometrických rovnic:

**Příklad 1:** Řešte v množině  $\mathbb{R}$  rovnici  $\sin x = \sin 2x$

Řešení:  $\sin x = 2 \sin x \cos x$   
 $\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$   
 $\sin x \cdot (1 - 2 \cos x) = 0$

$$\text{Použijeme vzorec} \\ \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

levou stranu rovnice vyjádříme ve tvaru součinu

$$\sin x = 0$$

$$1 - 2 \cos x = 0$$

dostaneme 2 goniometrické rovnice

$$\sin x = 0$$

$$x_1 = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$$

úhel zjistíme z jednotkové kružnice  
obě řešení (úhly  $0^\circ$  a  $180^\circ$ ) leží na p-římce  $\Rightarrow$   
můžeme je nahradit jedním řešením

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$1 - 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

podle znaménka  
před číslem určíme  
kvadranty

podle hodnoty určíme  
pomocný úhel

Do 4. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel odečteme od  $360^\circ$

$$x' = 60^\circ$$

$$\text{I. kvadrant: } x_2 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{IV. kvadrant: } x_3 = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

z tabulky zjistíme pomocný úhel

funkce kosinus je kladná v 1. a 4. kvadrantu

perioda funkce kosinus je  $360^\circ$

$$\text{Rovnice má 3 řešení: } x_1 = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$x_2 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x_3 = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$$

**Příklad 2:** Řešte v množině  $\mathbb{R}$  rovnici  $\text{tg}^2 x - 7 \text{tg} x + 10 = 0$

Řešení:

$$\text{tg} x = t$$

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$(t - 2) \cdot (t - 5) = 0$$

součin

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 5$$

$$\text{tg} x = 2$$

$$\text{tg} x = 5$$

$$\text{tg} x = 2$$

podle znaménka před  
číslím určíme  
kvadranty

podle hodnoty  
určíme pomocný  
úhel

zavedeme substituci (nahrazení)

přepíšeme rovnici pomocí substituce

kvadratickou rovnici řešíme rozkladem na

do substituce dosadíme zpět za  $t$

dostaneme 2 goniometrické rovnice

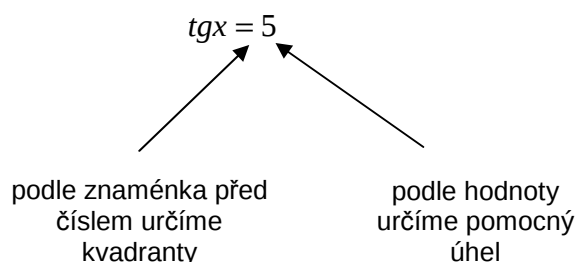
funkce tangens je kladná v 1. a 3. kvadrantu

obě řešení leží na přímce  $\Rightarrow$  stačí napsat řešení  
v 1. kvadrantu

$$\text{I. kvadrant: } x = 63^\circ 27' + k \cdot 180^\circ$$

pomocný úhel zjistíme pomocí kalkulačky

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



funkce tangens je kladná v 1. a 3. kvadrantu

I. kvadrant:  $x = 78^\circ 41' + k \cdot 180^\circ$

pomocný úhel zjistíme pomocí kalkulačky  
obě řešení leží na přímce  $\Rightarrow$  stačí napsat  
řešení v 1. kvadrantu

Zadaná rovnice má 2 řešení:  $x_1 = 63^\circ 27' + k \cdot 180^\circ$   
 $x_2 = 78^\circ 41' + k \cdot 180^\circ$

**Příklad 3:** Řešte v množině  $\mathbb{R}$  rovnici  $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$

Řešení:

$$2\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 4\sin x + 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 1 + \sin^2 x - 4\sin x + 2 = 0$$

$$3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$$

$\sin x = t$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

$$t_1 = \frac{4+2}{6} = 1$$

$$t_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$$

Upravíme rovnici tak,  
aby obsahovala jen 1  
funkci

Použijeme vzorec  
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

zavedeme substituci

přepíšeme rovnici pomocí substitute

vyřešíme kvadratickou rovnici

do substitute dosadíme zpět za  $t$

$$\sin x = 1$$

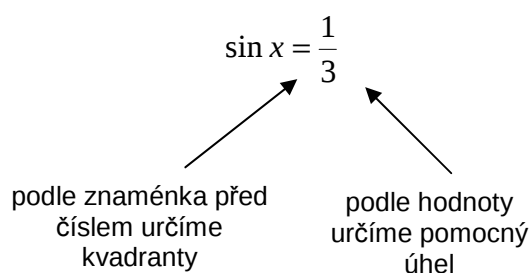
$$\sin x = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

dostaneme 2 goniometrické rovnice

řešení zjistíme na jednotkové kružnici  
perioda funkce sinus je  $360^\circ$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Do 2. kvadrantu se  
dostaneme tak že, pomocný  
úhel odečteme od  $180^\circ$

$$x' = 19^\circ 28'$$

$$\text{I. kvadrant: } x_2 = 19^\circ 28' + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{II. kvadrant: } x_3 = 160^\circ 32' + k \cdot 360^\circ$$

pomocný úhel zjistíme pomocí kalkulačky  
funkce sinus je kladná v 1. a 2. kvadrantu  
perioda funkce sinus je  $360^\circ$

Zadaná rovnice má 3 řešení:  $x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$

$$x_2 = 19^\circ 28' + k \cdot 360^\circ$$

$$x_3 = 160^\circ 32' + k \cdot 360^\circ$$

## ŘEŠENÍ OBEČNÉHO TROJÚHELNÍKU

### SINOVÁ VĚTA:

Poměr délek stran v trojúhelníku ABC je roven poměru sinu úhlů, které leží proti těmto stranám.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \text{Jiný zápis: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Poznámka:

Při použití věty musíme vzít v úvahu možnost dvou řešení (například  $\sin x = 1/2 \Rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ$ ) a na základě trojúhelníkové nerovnosti a věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku rozhodnout o počtu řešení.

### KOSINOVÁ VĚTA:

V trojúhelníku ABC se stranami a, b, c a jeho vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Větu většinou používáme v případě, kdy jsou dány dvě strany trojúhelníku a úhel, který svírají, a chceme zjistit délku zbývající strany.

### OBSAH TROJÚHELNÍKU ABC:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha, \quad S = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

$$\text{PRO POLOMÉR KRUŽNICE OPSANÉ } \Delta ABC \text{ PLATÍ: } r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

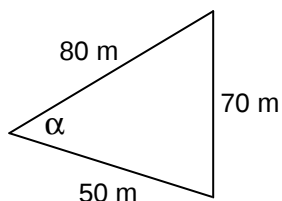
### UŽITÍ TRIGONOMETRIE

Trigonometrie je oblast goniometrie zabývající se užitím goniometrických funkcí při řešení úloh o trojúhelnících.

#### Řešené úlohy:

**Příklad 1:** V jakém zorném úhlu se jeví předmět 70 m dlouhý pozorovateli, který je od jednoho jeho konce vzdálen 50 m a od druhého konce 80 m?

Řešení:



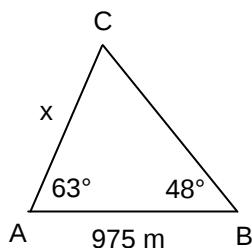
$$\begin{aligned} 70^2 &= 80^2 + 50^2 - 2 \cdot 80 \cdot 50 \cdot \cos \alpha \\ 2 \cdot 80 \cdot 50 \cdot \cos \alpha &= 80^2 + 50^2 - 70^2 \\ 8000 \cdot \cos \alpha &= 6400 + 2500 - 4900 \\ 8000 \cdot \cos \alpha &= 4000 \\ \cos \alpha &= \frac{1}{2} \\ \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$

úhel zjistíme pomocí kosinové věty

Pozorovatel vidí předmět v zorném úhlu  $60^\circ$ .

**Příklad 2:** Cíl C je pozorován ze dvou dělostřeleckých pozorovatelů A, B, které jsou od sebe vzdáleny 975 m, přitom je velikost úhlu  $\alpha = 63^\circ$  a velikost úhlu  $\beta = 48^\circ$ . Vypočítejte vzdálenost  $|AC|$ .

Řešení:



Vypočítáme úhel  $\gamma$ :

$$\gamma = 180^\circ - (63^\circ + 48^\circ) = 69^\circ$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{975} &= \frac{\sin 48^\circ}{\sin 69^\circ} \\ x &= \frac{\sin 48^\circ}{\sin 69^\circ} \cdot 975 \\ x &= 776m \end{aligned}$$

Vzdálenost  $x$  zjistíme pomocí sinové věty.

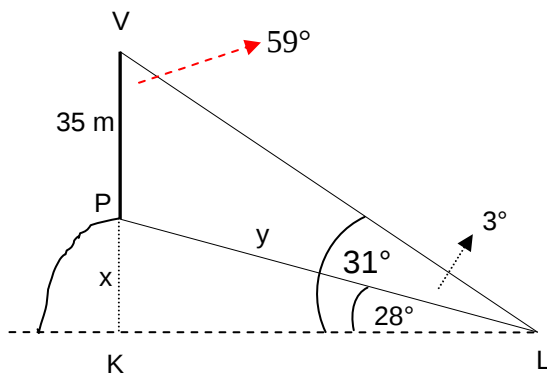
Poměr délek stran je roven poměru sinu úhlů, které leží proti těmto stranám

Vzdálenost  $|AC|$  měří přibližně 776 metrů.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Příklad 3:** Na vrcholu kopce stojí rozhledna 35m vysoká. Patu i vrchol vidíme z určitého místa v údolí pod výškovými úhly o velikosti  $28^\circ$  a  $31^\circ$ . Jak vysoko je vrchol kopce nad rovinou pozorovacího místa?

Řešení:



P ... pata rozhledny  
V ... vrchol rozhledny  
L ... pozorovací místo

$$180^\circ - (90^\circ + 31^\circ) = 59^\circ$$

$$\frac{y}{35} = \frac{\sin 59^\circ}{\sin 3^\circ}$$

$$y = \frac{\sin 59^\circ}{\sin 3^\circ} \cdot 35$$

$$y = \frac{\sin 59^\circ}{\sin 3^\circ} \cdot 35$$

$$y = 573,2 \text{ m}$$

$$\sin 28^\circ = \frac{x}{573,2}$$

$$x = 573,2 \cdot \sin 28^\circ$$

$$x = 269,1 \text{ m}$$

$$x + 35 = 269,1 + 35 = 304,1 \text{ m}$$

Z trojúhelníku KLV vypočítáme úhel u vrcholu V

Z trojúhelníku PLV pomocí sinové věty zjistíme y

Poměr délek stran je roven  
poměru sinu úhlů, které leží  
proti těmto stranám

Vrchol kopce je 304,1 metrů nad rovinou pozorovacího místa.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### PRACOVNÍ LIST 1

1. Následující úhly uveďte v obloukové míře:

$0^\circ =$

$120^\circ =$

$210^\circ =$

$360^\circ =$

$30^\circ =$

$135^\circ =$

$240^\circ =$

$45^\circ =$

$60^\circ =$

$150^\circ =$

$270^\circ =$

$15^\circ =$

$90^\circ =$

$180^\circ =$

$330^\circ =$

$720^\circ =$

2. Velikosti úhlů dané v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové:

$32^\circ =$

$56^\circ =$

$128^\circ =$

$35^\circ 12' =$

$21^\circ 54' =$

$327^\circ 36' =$

$15^\circ 05' =$

3. Velikosti úhlů dané v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové:

$\frac{4\pi}{3} =$

$\frac{14\pi}{9} =$

$\frac{12\pi}{5} =$

$0,16 =$

$0,64 =$

$\frac{7\pi}{10} =$

$1,27 =$

$3,58 =$

$\frac{\pi}{15} =$

$2,43 =$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### PRACOVNÍ LIST 2 – první část

1. Vypočítejte bez pomoci kalkulačky:

a)  $\sin 330^\circ =$

b)  $\cos(-180^\circ) =$

c)  $\operatorname{tg} 240^\circ =$

d)  $\cot g(-300^\circ) =$

e)  $\operatorname{tg} 135^\circ =$

f)  $\sin 210^\circ =$

g)  $\cos 240^\circ =$

h)  $\sin \frac{5}{6}\pi =$

i)  $\cos \frac{3}{4}\pi =$

j)  $\operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi =$

k)  $\cot g \frac{2}{3}\pi =$

l)  $\cos\left(-\frac{4}{3}\right)\pi =$

m)  $\sin\left(-\frac{7}{4}\right)\pi =$

n)  $\cot g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\pi =$

2. Pomocí kalkulačky zjistěte:

a)  $\sin 143^\circ 15' =$

b)  $\cos 137^\circ 42' =$

c)  $\sin(-12^\circ 6') =$

d)  $\sin 1 =$

e)  $\sin 4,2 =$

f)  $\operatorname{tg} 53^\circ 16' =$

g)  $\operatorname{tg}(-60^\circ) =$

h)  $\operatorname{tg} 1475^\circ =$

3. Vypočítejte bez použití kalkulaček:

a)  $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cot g 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ =$

b)  $3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \sin \frac{3}{2}\pi + 8 \cdot \operatorname{tg} \pi =$

c)  $a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + b^2 \cdot \cos 0 + 2ab \cdot \cos \pi =$

d)  $2 \cdot \cos \pi + 6 \cdot \cot g \frac{3}{2}\pi - 5 \cdot \sin 2\pi =$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### PRACOVNÍ LIST 2 – druhá část

e)  $2 \cdot \operatorname{tg} 0 + \sin \pi - \cos \frac{3}{2} \pi - \cot g \frac{\pi}{2} =$

f)  $\cot g \frac{12}{8} \pi \cdot \operatorname{tg} 11\pi \cdot \cot g \frac{19}{3} \pi \cdot \operatorname{tg}(-7\pi) =$

g)  $\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cot g\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) \cdot \cos(-4\pi)} =$

h)  $2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \sqrt{\cot g \frac{\pi}{4}} =$

i)  $\left(\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{3} =$

j)  $\frac{\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}} =$

k)  $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \cot g \frac{\pi}{6}\right)^2 =$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ I.

1. Načrtněte grafy funkcí:

a)  $y = \sin x + 1$

b)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

c)  $y = 2 \sin x$

d)  $y = -\sin x$

e)  $y = \sin 2x$

f)  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

g)  $y = \cos x - 2$

h)  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

i)  $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

\* j)  $y = |\sin x|$

\* k)  $y = \sin|x|$

\* l)  $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$

\* m)  $y = |\cos x|$

\* n)  $y = |\cos x| + 1$

2. Zjednodušte následující výrazy a uveďte podmínky, za kterých jsou definovány:

a)  $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$

b)  $(1 + \cos x)(1 + \cos x)$

c)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \cot^2 x}$

d)  $\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$

e)  $1 - \sin^2 x + \cot^2 x \cdot \sin^2 x$

f)  $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

g)  $(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cdot \cos x$

h)  $\sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x$

i)  $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2$

j)  $\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$

k)  $\sin^2 x \cdot \cot^2 x + \sin^2 x - 1$

l)  $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x$

m)  $\cos x \cdot (\operatorname{tg} x + \cot x)$

n)  $\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

o)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} - \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

p)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

q)  $\frac{1}{1 + \cot x} - \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$

r)  $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$

s)  $\cos 2x + 2 \sin^2 x$

t)  $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$

u)  $\frac{\sin 2x}{\cos 2x - \cos^2 x}$

v)  $\frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \cos 2x}$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ II.

1. Uveďte podmínky, za kterých jsou následující rovnosti definovány, a pak je dokažte:

a)  $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cdot \cos x} = 2$

b)  $\frac{tg^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = tg^2 x$

c)  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

d)  $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

e)  $\frac{tg^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = tg^2 x$

f)  $1 - 2 \sin^2 x = \frac{\cot^2 x - 1}{\cot^2 x + 1}$

g)  $\frac{1}{tg^2 x + 1} + \frac{1}{\cot^2 x + 1} = 1$

h)  $tgx - \cot gx = \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$

i)  $\left( \frac{1 - tgx}{1 - \cot gx} \right)^2 = \frac{1 + tg^2 x}{1 + \cot^2 x}$

j)  $\sin x + \cos x = \frac{\sin x}{tgx} + \frac{\cos x}{\cot gx}$

k)  $\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot tgx = \cos x$

l)  $\sin x \cdot \cot gx = 1 - \sin^2 x$

m)  $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$

n)  $\frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \cot gx$

o)  $\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = tgx$

p)  $\frac{\sin 2x - \cos x}{1 - \cos 2x - \sin x} = \cot gx$

q)  $\frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = \cos 2x$

2. Určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí, aniž byste zjišťovali velikost úhlu:

a)  $\sin x = -\frac{1}{5}, x \in \left( \pi, \frac{3}{2}\pi \right)$

c)  $\cos x = \frac{4}{5}, x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$

b)  $tgx = 2\sqrt{2}, x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$

d)  $\cot gx = -\frac{7}{24}, x \in \left( \frac{3}{2}\pi, 2\pi \right)$

3. Zjednodušte (použitím součtových vzorců a vzorců pro součet a rozdíl goniometrických funkcí):

a)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c)  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$

b)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

4. Vypočítejte (použitím součtových vzorců a vzorců pro součet a rozdíl goniometrických funkcí):

a)  $\frac{\sin 65^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 80^\circ + \cos 40^\circ}$

c)  $-\cos 76^\circ \cos 164^\circ + \sin 76^\circ \sin 164^\circ$

b)  $\frac{\cos 50^\circ - \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 50^\circ}$

d)  $-\sin 828^\circ \cos 603^\circ + \cos 828^\circ \sin 603^\circ$

e)  $\cos 254^\circ \cos 134^\circ + \sin 254^\circ \sin 134^\circ$

f)  $-\cos 154^\circ - \cos 746^\circ$

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ III.

1. Řešte rovnice:

a)  $2 \sin x = -1$

b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $2 \sin(3x + \pi) = -1$

d)  $\cos 2x = 0$

e)  $\cos^2 x - \cos x = 0$

f)  $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$

g)  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

h)  $\sin x \cdot \cos x = 0$

i)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

j)  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$

k)  $\operatorname{tg} x + \cot gx - 2 = 0$

l)  $2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 7$

m)  $2 \sin^2 x - \sin x = 0$

n)  $4 \cos^3 x = \cos x$

o)  $\sin x + \sin 2x = 0$

p)  $\cos 2x + \sin x \cos x = 1$

q)  $\sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x - 2 = 0$

\* 2. Řešte rovnice:

a)  $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

b)  $(\sin x + \cos x)^2 = 1$

c)  $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$

d)  $(1 + \cos 2x) \sin x = 4 \cos^2 x$

e)  $\cos x = -\sqrt{3} \sin x$

f)  $\sin x = \cos x$

g)  $1 = \cos 2x - \sin x$

\* 3. Řešte nerovnice:

a)  $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\sin x < 0$

c)  $\operatorname{tg} x \leq -1$

d)  $\cot gx > -1$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ IV.

1. Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a)  $c = 20\text{cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 105^\circ$

b)  $a = 11,6\text{dm}$ ,  $c = 9\text{dm}$ ,  $\alpha = 65^\circ 30'$

c)  $a = 5\text{cm}$ ,  $b = 6\text{cm}$ ,  $c = 7\text{cm}$

d)  $b = 64\text{mm}$ ,  $c = 29\text{mm}$ ,  $\alpha = 47^\circ$

e)  $a = 38\text{cm}$ ,  $b = 48\text{cm}$ ,  $\alpha = 37^\circ$

f)  $b = 25\text{cm}$ ,  $c = \sqrt{2} \cdot 25\text{cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$

g)  $a = 12,4\text{cm}$ ,  $b = 16,8\text{cm}$ ,  $\gamma = 60^\circ$

2. Vypočítejte obvod trojúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru 5 cm a jehož vnitřní úhly mají velikosti  $45^\circ$  a  $60^\circ$ .

3. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li  $a = 25,1\text{cm}$ ,  $\alpha = 63^\circ$ ,  $\beta = 38^\circ$ .

4. Vypočítejte poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, je-li  $a = 26,5\text{cm}$  a  $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$ .

5. Z pozorovatelný 15 m vysoké a vzdálené 30 m od břehu řeky se jeví šířka řeky v zorném úhlu  $15^\circ$ . Vypočítejte šířku řeky.

6. Letadlo letí ve výšce 2500 m k pozorovatelně. V okamžiku prvního měření bylo vidět pod výškovým úhlem  $\alpha = 28^\circ$ , při druhém měření pod výškovým úhlem  $\beta = 50^\circ$ . Určete vzdálenost, kterou letadlo proletělo mezi oběma měřeními.

7. Sílu o velikosti  $F = 465\text{ N}$  rozložte na dvě složky tak, aby s ní svíraly úhly o velikostech  $\alpha = 69^\circ 30'$  a  $\beta = 74^\circ 10'$ . Vypočítejte velikosti složek.

8. Ze dvou míst K, L na vodorovné rovině vzdálených od sebe 3,1 km byl pozorován mrak nad spojnicí obou míst ve svislé rovině ve výškových úhlech  $\alpha = 78^\circ 40'$  a  $\beta = 63^\circ 50'$ . Jak vysoko byl mrak?

9. Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa A ve výškovém úhlu  $\alpha = 39^\circ$ . Přijdeme-li směrem k jeho patě o 50 m blíž na místo B, vidíme z něho vrchol věže ve výškovém úhlu  $\beta = 58^\circ 42'$ . Jak vysoká je věž?