

|                                           |                |                         |                          |
|-------------------------------------------|----------------|-------------------------|--------------------------|
| <i>Předmět:</i>                           | <i>Ročník:</i> | <i>Vytvořil:</i>        | <i>Datum:</i>            |
| <b>MATEMATIKA</b>                         | <b>DRUHÝ</b>   | <b>Mgr. Tomáš MAŇÁK</b> | <b>25. červenec 2012</b> |
| <i>Název zpracovaného celku:</i>          |                |                         |                          |
| <b>EXPONENCIÁLNÍ A LOGARIMICKÁ FUNKCE</b> |                |                         |                          |

## EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce o základu  $a$  je každá funkce daná předpisem:

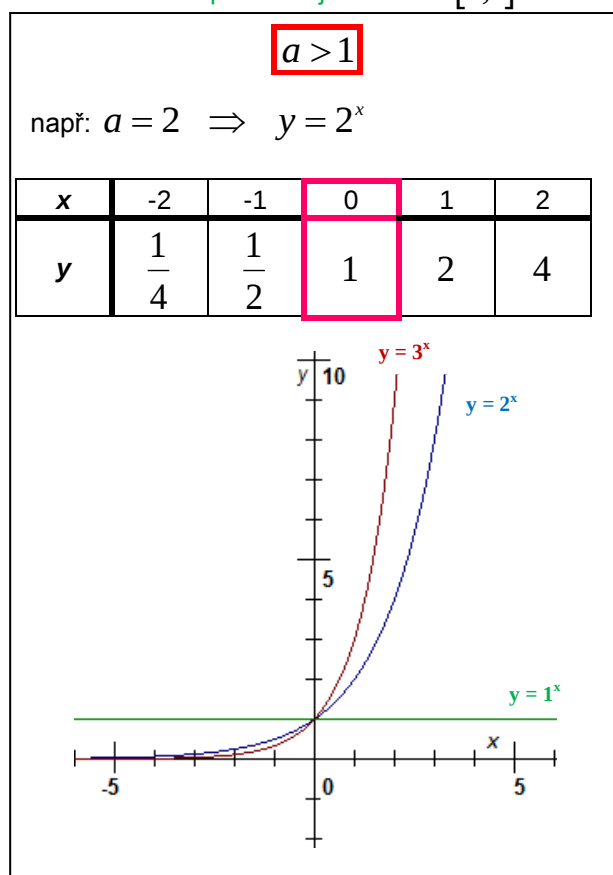
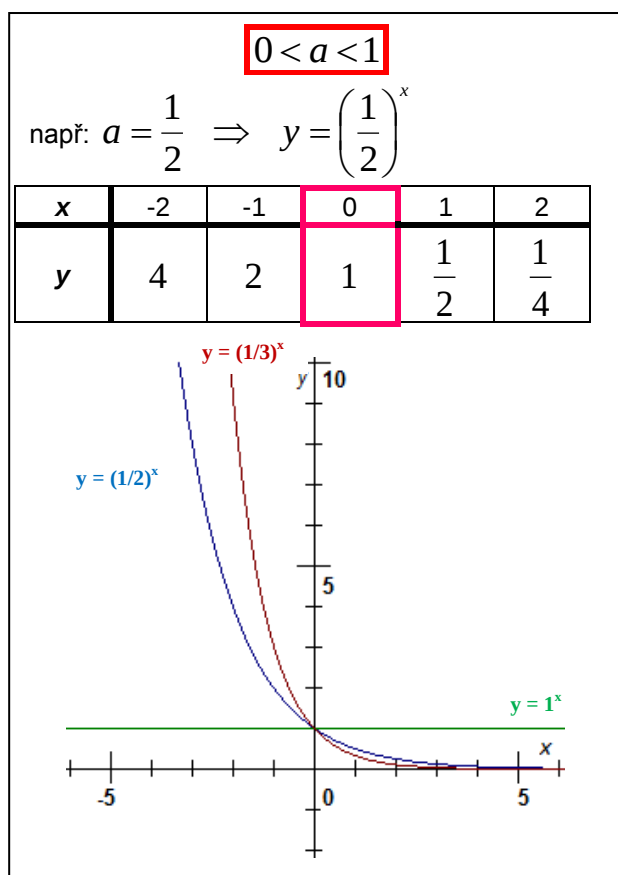
$$f: y = a^x; a > 0 \wedge a \neq 1$$

$a$  ...základ exponenciální funkce

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow H(f) = \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$$

je-li  $a = 1$  by bylo  $y = 1^x \Rightarrow y = 1$  ..... konstantní funkce (grafem je přímka rovnoběžná s osou  $x$  a procházející bodem  $[0;1]$ )



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Vlastnosti exponenciálních funkcí:

$$0 < a < 1$$

- 1)  $D(f) = R = (-\infty; \infty)$
- 2)  $H(f) = R^+ = (0; \infty)$
- 3) Není sudá, ani lichá.
- 4) Je omezená zdola ( $a^x > 0$ ).
- 5) Je **klesající** v  $D$ .
- 6) Je prostá.
- 7) Nemá maximum, ani minimum.
- 8) Je inverzní k příslušné funkci logaritmické se stejným základem.
- 9) Je spojitá v  $R$ .
- 10)  $[0; 1] \in f$

$$a > 1$$

- 1)  $D(f) = R = (-\infty; \infty)$
- 2)  $H(f) = R^+ = (0; \infty)$
- 3) Není sudá, ani lichá.
- 4) Je omezená zdola ( $a^x > 0$ ).
- 5) Je **rostoucí** v  $D$ .
- 6) Je prostá.
- 7) Nemá maximum, ani minimum.
- 8) Je inverzní k příslušné funkci logaritmické se stejným základem.
- 9) Je spojitá v  $R$ .
- 10)  $[0; 1] \in f$

- Graf každé exponenciální funkce  $y = a^x$  prochází bodem  $[0; 1]$ , protože  $a^0 = 1$ . Graf leží vždy nad osou  $x$ , protože  $a > 0$  a  $y = a^x > 0$ .
- Osa  $x$  je **asymptotou** každé exponenciální funkce  $y = a^x$ .
- **Grafem exponenciální funkce je exponenciální křivka (exponenciála).**
- Exponenciální funkce o základu 10 se nazývá *dekadická exponenciální funkce*. Je-li základem tzv. Eulerovo číslo  $e = 2,718281\dots$  nazývá se funkce  $f: y = e^x$  *přirozená exponenciální funkce*.
- Exponenciální funkce se často vyskytuje i v praxi, např.: zákon radioaktivní přeměny  $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ , zákon absorpce záření  $I = I_0 \cdot e^{-a \cdot x}$ , řešení exponenciálních rovnic a nerovnic atd.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 1

1) Sestrojte graf funkce  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  a zapište její vlastnosti.

2) Sestrojte graf funkce  $y = (\sqrt{3})^x$  a zapište její vlastnosti.

3) Sestrojte graf funkce  $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$  a zapište její vlastnosti.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 2

4) Sestrojte graf funkce  $y = 2^x - 1$  a zapište její vlastnosti.

5) Sestrojte graf funkce  $y = 2^x + 3$  a zapište její vlastnosti.

6) Sestrojte graf funkce  $y = |2^x + 3|$  a zapište její vlastnosti.

7) Sestrojte graf funkce  $y = 2^{x+3}$  a zapište její vlastnosti.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 3

8) Sestrojte graf funkce  $y = 2^{x-1}$  a zapište její vlastnosti.

9) Rozhodněte, pro která  $m \in \mathbb{R}$  je funkce  $y = \left(\frac{2m-3}{m+1}\right)^x$  rostoucí.

10) Rozhodněte, pro která  $p \in \mathbb{R}$  je funkce  $y = \left(\frac{p-3}{2p+1}\right)^x$  klesající.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 4

11) Na základě průběhů grafů exponenciálních funkcí rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

a)  $0,4^{1,6} < 0,4^{1,8}$

b)  $\left(\frac{6}{7}\right)^{2,5} < \left(\frac{6}{7}\right)^{2,4}$

c)  $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,4} < \left(\frac{4}{3}\right)^{1,3}$

d)  $1,25^{1,5} < 1,25^{1,2}$

e)  $\left(\frac{5}{8}\right)^{2,6} < \left(\frac{5}{8}\right)^{2,3}$

f)  $\left(\frac{7}{6}\right)^{0,9} > \left(\frac{7}{6}\right)^{1,7}$

12) Který ze vztahů  $0 < a < 1$  nebo  $a > 1$  platí, je-li:

a)  $a^{\frac{2}{5}} < a^{\frac{7}{3}}$

b)  $a^{\frac{21}{6}} < a^{\frac{1}{6}}$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 5

13) Rozhodněte, jaký vztah platí mezi čísly  $p$ ,  $q$  v těchto případech:

a)  $\left(\frac{3}{7}\right)^p < \left(\frac{3}{7}\right)^q$

b)  $\left(\frac{8}{5}\right)^p < \left(\frac{8}{5}\right)^q$

## LOGARITMICKÁ FUNKCE

**Logaritmická funkce o základu  $a$**  je každá funkce daná předpisem:

$$f: y = \log_a x; \quad a > 0 \wedge a \neq 1$$

$a$  ...základ logaritmické funkce

$$x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$$

$$y \in \mathbb{R} \Rightarrow H(f) = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$$

$$f: y = a^x; \quad a > 0 \wedge a \neq 1$$

..... exponenciální funkce o základu  $a$

$$a \in (0; 1)$$

$f$  je prostá funkce

$$a = 1$$

$x$

$$a \in (1; \infty)$$

$f$  je prostá funkce

$$f^{-1}: x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

(čteme:  $y$  = **logaritmus  $x$  při základu  $a$** ;  $a > 0 \wedge a \neq 1$ )

- **Logaritmická funkce o základu  $a$ ;  $a > 0 \wedge a \neq 1$ , je funkce inverzní k exponenciální funkci o stejném základě  $a$  a zapisuje se  $y = \log_a x$**

- **Grafem logaritmické funkce je **logaritmická křivka**.**

- **Funkční hodnoty** logaritmické funkce se nazývají **logaritmy**. Podle definice platí:

$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$  pro každé  $a > 0 \wedge a \neq 1$ ;  $x \in (0; \infty)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Nejčastěji se jedná o **dekadické logaritmy** ( $a = 10$ ), které značíme  $\log x$ , popř. o **přirozené logaritmy**  $\ln x$  se základem  $a = e$ . Obecný vztah mezi logaritmy o různých základech je

$$\log_a x = \frac{\log_z x}{\log_z a}; \quad z > 0 \wedge z \neq 1.$$

Např.:  $\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = 0,631$ ;  $\log_9 6 = \frac{\log 6}{\log 9} = 0,816$

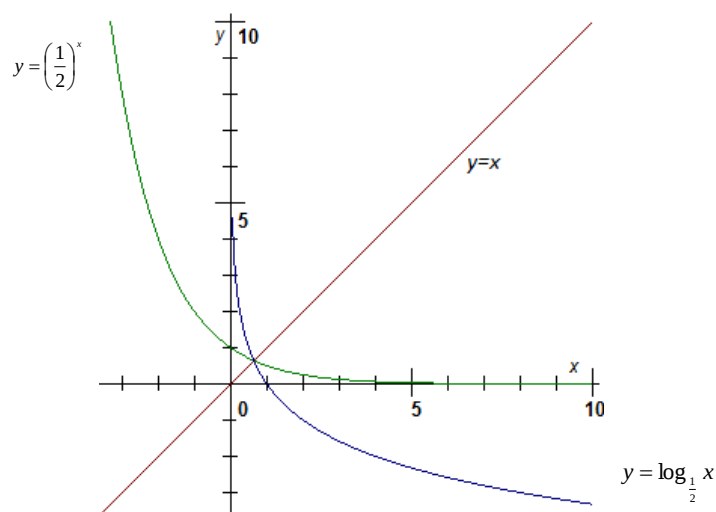
- **Graf logaritmické funkce je souměrně sdružený s grafem exponenciální funkce pro totéž  $a$  podle přímky o rovnici  $y = x$  (osa I. a III. kvadrantu).**

# INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$0 < a < 1$$

např:  $a = \frac{1}{2} \Rightarrow f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow f^{-1}: y = \log_{\frac{1}{2}} x$

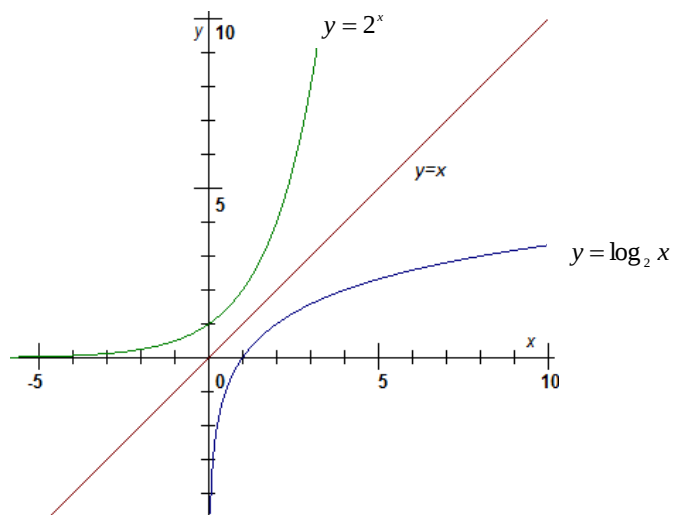
|     |     |    |    |    |   |               |               |               |     |          |
|-----|-----|----|----|----|---|---------------|---------------|---------------|-----|----------|
| $f$ | $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1             | 2             | 3             | $y$ | $f^{-1}$ |
|     | $y$ | 8  | 4  | 2  | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $x$ |          |



$$a > 1$$

např:  $a = 2 \Rightarrow f: y = 2^x \Rightarrow f^{-1}: y = \log_2 x$

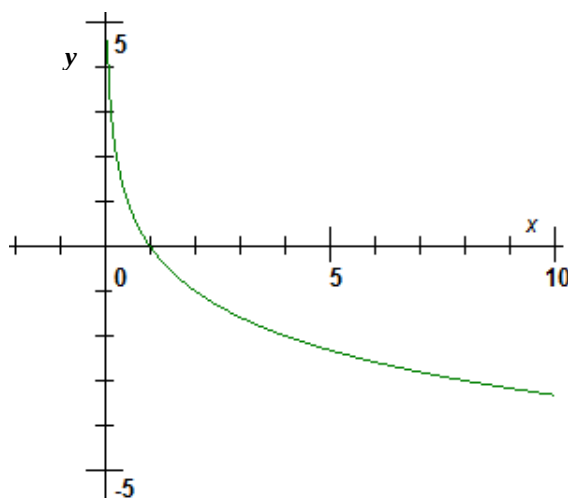
|     |     |               |               |               |   |   |   |   |     |          |
|-----|-----|---------------|---------------|---------------|---|---|---|---|-----|----------|
| $f$ | $x$ | -3            | -2            | -1            | 0 | 1 | 2 | 3 | $y$ | $f^{-1}$ |
|     | $y$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | $x$ |          |



**Shrnující tabulky:**

$$y = \log_a x$$

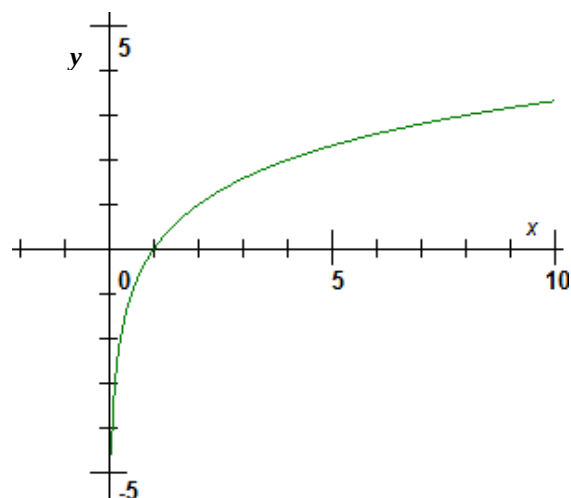
$$0 < a < 1$$



**Vlastnosti:**

- 1)  $D(f) = \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$
- 2)  $H(f) = \mathbb{R}$
- 3) Není sudá, ani lichá.
- 4) Je neomezená v  $D$ .
- 5) Je **klesající** v  $D$ .
- 6) Je prostá.
- 7) Nemá maximum, ani minimum.
- 8) Je inverzní k příslušné funkci exponenciální se stejným základem.
- 9) Je spojitá v  $D$ .
- 10)  $[1; 0] \in f$

$$a > 1$$



**Vlastnosti:**

- 1)  $D(f) = \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$
- 2)  $H(f) = \mathbb{R}$
- 3) Není sudá, ani lichá.
- 4) Je neomezená v  $D$ .
- 5) Je **rostoucí** v  $D$ .
- 6) Je prostá.
- 7) Nemá maximum, ani minimum.
- 8) Je inverzní k příslušné funkci exponenciální se stejným základem.
- 9) Je spojitá v  $D$ .
- 10)  $[1; 0] \in f$

S logaritmy se setkáváme při řešení logaritmických a exponenciálních rovnic a nerovnic i v technické praxi. (např.:  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ ;  $pH = -\log[H_3O^+]$ ;  $S = k \cdot \ln P$ , ...)



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 6

1) Načrtněte grafy logaritmických funkcí a запиšte jejich vlastnosti:

a)  $y = \log_4 x$

b)  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

c)  $y = \log x$

d)  $y = -\log x$

e)  $y = \log_2 x + 3$

f)  $y = \log_2(x + 3)$

g)  $y = \log_2(x + 3) - 2$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 7

2) Na základě průběhů grafů logaritmických funkcí rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

- a)  $\log_2 5 > 0$
- b)  $\log_5 0,7 \leq 0$
- c)  $\log_3 6 > 0$
- d)  $\log_{0,2} 8 > 0$
- e)  $\log_2 0,5 < 0$
- f)  $\log_{0,1} 1 = 0$
- g)  $\log_4 11 < \log_4 15$
- h)  $\log_3 5 < \log_3 8$
- i)  $\log_{0,7} 5 \leq \log_{0,7} 4$
- j)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} > 0$
- k)  $\log_{0,4} 1 = 0$
- l)  $\log_6 8 > \log_6 12$
- m)  $\log_{0,6} 8 \leq \log_{0,6} 4$
- n)  $\log_{0,5} 7 \leq \log_{0,5} 8$

3) Rozhodněte, která z následujících čísel jsou záporná, kladná, rovna nule. (Využijte průběhu logaritmické funkce.)

- a)  $\log_5 0,5$
- b)  $\log_{0,5} 0,5$
- c)  $\log_{0,5} 5$
- d)  $\log_5 5$
- e)  $\log_{0,5} 6$
- f)  $-\log_{14} 11$
- g)  $\log_7 8$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 8

4) Určete všechna taková  $x \in R$ , pro která platí. (Využijte průběhu logaritmické funkce.)

a)  $\log_{0,2} x = 0$

b)  $\log_3 x < 0$

c)  $\log_3 x \geq 0$

d)  $\log_{\frac{1}{2}} x = 0$

e)  $\log_5 x > 0$

f)  $\log_4 x \geq 0$

g)  $\log_8 x < 0$

h)  $\log_2 x < \log_2 4$

i)  $\log_{0,6} 5 \leq \log_{0,6} x$

j)  $\log_3 x < \log_3 9$

k)  $\log_{0,4} 6 \geq \log_{0,4} x$

l)  $\log_x 3 < \log_x 11$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 9

5) Určete definiční obor funkce;  $z > 0$ ;  $z \neq 1$ .

a)  $f_1: y = \log_z(x + 5)$

b)  $f_2: y = \log_z(-x)$

c)  $f_3: y = \log_z \sqrt{x + 2}$

d)  $f_4: y = \log_z \frac{x - 3}{x + 2}$

e)  $f_5: y = \log_z(x - 4)(x - 1)$

f)  $f_6: y = \frac{x}{\log(x - 2)}$

g)  $f_7: y = \frac{\log_3(2x - 3)}{x - 5}$

h)  $f_8: y = \log \frac{3x - 1}{1 - x}$

i)  $f_9: y = \frac{x}{\log(x - 5) - 1}$

j)  $f_{10}: y = \log_z(2x^2 + 4x - 6)$

k)  $f_{11}: y = \log_z(x^2 - 10) + \sqrt{x^2 - 5x}$

l)  $f_{12}: y = \frac{1}{\ln(1 - x)} + \sqrt{x + 2}$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Pracovní list 10

6) Pro které reálné hodnoty parametru  $p$  je funkce  $f: y = \log_{\frac{p+1}{p}} x$

- a) klesající,
- b) rostoucí.

Použitá literatura:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

O. Odvárko, J. Řepová: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť  
3. část, Prometheus 2006

O. Odvárko: Matematika pro gymnázia – Funkce, Prometheus 2005

I. Dušek: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN 1988

M. Hudcová, I. Kubičková: Sběrka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium, Prometheus  
2004