



evropský
sociální
fond v ČR



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYJÁDŘENÍ NEZNÁMÉ Z TECHNICKÝCH VZORCŮ

Motivace:

V mnoha všeobecně vzdělávacích předmětech (matematika, fyzika, chemie, apod.) a řadě odborných předmětů (mechanika, elektrotechnika, aj.) se setkáváme s problémy, jak vyjádřit a následně vypočítat požadovanou neznámou ze zadaných údajů užitím daných technických vzorců. Proto je důležité, naučit se z daného vzorce vyjádřit požadovanou neznámou. Využíváme k tomu stejných kroků, které provádíme, když chceme vypočítat neznámou z matematické rovnice.

Teorie:

Obecný postup při vyjadřování požadované neznámé ze vzorce:

- 1) Na vzorec se zaměříme jako na matematickou rovnici.
- 2) Uvědomíme si, která proměnná ve vzorci pro nás představuje požadovanou neznámou.
- 3) Všechny další údaje (výrazy) ve vzorci (konstanty a další proměnné) považujeme **vždy** pomyslně za „nové konstanty“.
- 4) S těmito novými konstantami (viz krok 3.) provádíme **ekvivalentní úpravy**, které běžně používáme při řešení rovnic:

Ekvivalentními úpravami jsou například:

- přičtení (odečtení) stejného čísla k oběma stranám rovnice
- přičtení (odečtení) stejného násobku neznámé k oběma stranám rovnice
- vynásobení (vydělení) obou stran rovnice stejným nenulovým číslem
- „ekvivalentní“ úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice, atd.

(Ekvivalentní úprava vystihuje skutečnost, že každá nově získaná rovnice má naprosto stejné řešení jako výchozí rovnice.)

Někdy při řešení úlohy používáme i **důsledkové úpravy** – nejčastěji to je:

- umocnění obou stran rovnice na druhou.

(Důsledková úprava vystihuje skutečnost, že každé řešení původní rovnice je také řešením nové rovnice – obráceně to však platit nemusí.)

Zdůrazněme, že početní operace násobení a dělení mají přednost před sčítáním a odčítáním.

- 5) Požadovanou neznámou převedeme pomocí těchto úprav na jednu stranu rovnice. Nachází-li se neznámá ve vzorci ve více členech, pak všechny tyto členy převedeme na jednu stranu rovnice a zbývající členy ve vzorci, které neobsahují neznámou, převedeme na opačnou stranu rovnice.
- 6) Neznámou osamostatníme např. vytýkáním před závorku.
- 7) Neznámou ze vzorce vyjádříme a získáme **konečný výsledek**.

Poznámka: **Všechny úpravy provádíme jen pro přípustné hodnoty proměnných.** V řešených úlohách nejsou tyto podmínky uváděny.

Řešené úlohy:

Příklad 1.

Vyjádřete v a r ze vzorce $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v$

Řešení:

(a) vyjádření v

Uvědomíme si, že chceme vyjádřit neznámou v . Všechny ostatní proměnné a konstanty ve vzorci považujeme za „nové konstanty“ a provádíme s nimi ekvivalentní úpravy.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v \quad / : 3 \quad (\text{odstranění zlomku – vynásobení 3})$$

$$3 \cdot V = \pi \cdot r^2 \cdot v \quad (\text{výměna stran rovnice} \Rightarrow \text{lepší názornost})$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\pi \cdot r^2 \cdot v = 3 \cdot V$$

$$/:(\pi \cdot r^2)$$

(odstranění „nové konstanty“ $\pi \cdot r^2$ z levé strany rovnice – rovnici dělíme výrazem $\pi \cdot r^2$)

$$v = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2}$$

(konečný výsledek)

(b) vyjádření r

Uvědomíme si, že chceme vyjádřit neznámou r . Všechny ostatní proměnné a konstanty ve vzorci považujeme za „nové konstanty“ a provádíme s nimi ekvivalentní úpravy.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v$$

$$/ \cdot 3$$

(odstranění zlomku – vynásobení 3)

$$3 \cdot V = \pi \cdot r^2 \cdot v$$

(výměna stran rovnice $\Rightarrow$ lepší názornost)

$$\pi \cdot r^2 \cdot v = 3 \cdot V$$

$$/:(\pi \cdot r^2)$$

(odstranění „nové konstanty“ $\pi \cdot v$ z levé strany rovnice – rovnici dělíme výrazem $\pi \cdot v$)

$$r^2 = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot v}$$

(odstranění druhé mocniny – rovnici odmocníme)

$$r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot v}}$$

(konečný výsledek)

Příklad 2.

Vyjádřete R a R_1 ze vzorce $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Řešení:

(a) vyjádření R

Uvědomíme si, že chceme vyjádřit neznámou R . Všechny ostatní proměnné a konstanty ve vzorci považujeme za „nové konstanty“ a provádíme s nimi ekvivalentní úpravy.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

(sečtení zlomků na pravé straně rovnice převodem na společný jmenovatel)

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$$

(převrácení zlomků a výměna pořadí některých členů ve vzorci)

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

(konečný výsledek)

(b) vyjádření R_1

Uvědomíme si, že chceme vyjádřit R_1 . Všechny ostatní proměnné a konstanty ve vzorci považujeme za „nové konstanty“ a provádíme s nimi ekvivalentní úpravy.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad / \left(-\frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{osamostatnění výrazu obsahujícího } R_1 \text{ odečtením}$$

výrazu $\frac{1}{R_2}$ od obou stran rovnice)

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} \quad (\text{výměna stran rovnice} \Rightarrow \text{lepší názornost})$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \quad (\text{úprava zlomků na pravé straně rovnice převodem na společný jmenovatel})$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{R \cdot R_2} \quad (\text{převrácení zlomků na obou stranách rovnice})$$

$$R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R} \quad (\text{konečný výsledek})$$

Příklad 3.

Vyjádřete a ze vzorce $S = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

Postup:

Uvědomíme si, že chceme vyjádřit neznámou a . Všechny ostatní proměnné a konstanty ve vzorci považujeme za „nové konstanty“ a provádíme s nimi ekvivalentní úpravy.

$$S = 2 \cdot (ab + ac + bc) \quad / :2 \quad (\text{odstranění konstanty 2 z pravé strany rovnice vydělením číslem 2})$$

$$\frac{S}{2} = ab + ac + bc \quad / (-bc) \quad (\text{odstranění výrazu } bc \text{ z pravé strany rovnice odečtením výrazu } bc \text{ od obou stran rovnice})$$

$$\frac{S}{2} - bc = ab + ac \quad (\text{osamostatnění neznámé } a \text{ na pravé straně rovnice jejím vytknutím před závorku})$$

$$\frac{S}{2} - bc = a(b + c) \quad (\text{výměna stran rovnice} \Rightarrow \text{lepší názornost})$$

$$a(b + c) = \frac{S}{2} - bc \quad (\text{úprava výrazu na pravé straně rovnice převedením na společný jmenovatel})$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$a(b+c) = \frac{S-2bc}{2}$$

$$:(b+c)$$

(odstranění „nové konstanty“ $(b+c)$ z levé strany rovnice

vydělením rovnice výrazem $(b+c)$)

$$a = \frac{S-2bc}{2(b+c)}$$

(konečný výsledek)

Příklad 4.

Vyjádřete $\rho; l; d$ ze vzorce
$$R = \rho \cdot \frac{l}{\pi \cdot \frac{d^2}{4}}$$

Řešení:

(a) vyjádření ρ

Uvědomíme si, že chceme vyjádřit neznámou ρ . Všechny ostatní proměnné a konstanty ve vzorci považujeme za „nové konstanty“ a provádíme s nimi ekvivalentní úpravy.

$$R = \rho \cdot \frac{l}{\pi \cdot \frac{d^2}{4}}$$

$$l \cdot \left(\pi \cdot \frac{d^2}{4} \right)$$

(odstranění zlomku na pravé straně rovnice vynásobením

rovnice výrazem $\pi \cdot \frac{d^2}{4}$)

$$R \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \rho \cdot l$$

(úprava zápisu na levé straně rovnice)

$$\frac{R \cdot \pi \cdot d^2}{4} = \rho \cdot l$$

$$:l$$

(odstranění konstanty l z pravé strany rovnice vydělením „novou konstantou“ l)

$$\rho = \frac{R \cdot \pi \cdot d^2}{4l}$$

(výměna stran rovnice - **konečný výsledek**)

(b) vyjádření l

Uvědomíme si, že chceme vyjádřit neznámou l . Všechny ostatní proměnné a konstanty ve vzorci považujeme za „nové konstanty“ a provádíme s nimi ekvivalentní úpravy. Využijeme postupu z části (a) tohoto příkladu, a to 3. řádku.

$$\frac{R \cdot \pi \cdot d^2}{4} = \rho \cdot l$$

$$:\rho$$

(odstranění konstanty ρ z pravé strany rovnice

vydělením rovnice konstantou ρ)

$$l = \frac{R \cdot \pi \cdot d^2}{4\rho}$$

(výměna stran rovnice – **konečný výsledek**)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

(c) vyjádření d

Uvědomíme si, že chceme vyjádřit neznámou d . Všechny ostatní proměnné a konstanty ve vzorci považujeme za „nové konstanty“ a provádíme s nimi ekvivalentní úpravy. Využijeme postupu z části (a) tohoto příkladu, a to 3. řádku.

$$\frac{R \cdot \pi \cdot d^2}{4} = \rho \cdot l \quad | \cdot \left(\frac{4}{R \cdot \pi} \right) \quad \left(\text{odstranění konstanty } \frac{R \cdot \pi}{4} \text{ z levé strany rovnice} \right)$$

vynásobením obou stran rovnice výrazem $\frac{4}{R \cdot \pi}$

$$d^2 = \frac{4 \cdot \rho \cdot l}{R \cdot \pi} \quad \left(\text{odstranění druhé mocniny neznámé odmocněním rovnice} \right)$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot \rho \cdot l}{R \cdot \pi}} \quad \text{(konečný výsledek)}$$

Příklad 5.

Vyjádřete $E; n; r; R$ ze vzorce $I = \frac{n \cdot E}{R + n \cdot r}$

Řešení:

(a) vyjádření E

$$I = \frac{n \cdot E}{R + n \cdot r} \quad | \cdot (R + n \cdot r) \quad \left(\text{odstranění zlomku na pravé straně rovnice vynásobením rovnice výrazem } (R + n \cdot r) \right)$$

$$I \cdot (R + n \cdot r) = n \cdot E \quad | : n \quad \left(\text{odstranění konstanty } n \text{ z pravé strany rovnice vydělením rovnice konstantou } n \right)$$

$$E = \frac{I \cdot (R + n \cdot r)}{n} \quad \left(\text{výměna stran rovnice - konečný výsledek} \right)$$

(b) vyjádření n

Při vyjádření této neznámé využijeme úpravy z části (a) tohoto příkladu, a to 2. řádku.

$$I \cdot (R + n \cdot r) = n \cdot E \quad \left(\text{roznásobení závorky na levé straně rovnice} \right)$$

$$I \cdot R + I \cdot n \cdot r = n \cdot E \quad | (-I \cdot n \cdot r) \quad \left(\text{převod výrazů obsahujících neznámou } n \text{ na jednu stranu rovnice} \right)$$

$$I \cdot R = n \cdot E - I \cdot n \cdot r \quad \left(\text{osamostatnění neznámé } n \text{ vytknutím před závorku} \right)$$

$$I \cdot R = n \cdot (E - I \cdot r) \quad | : (E - I \cdot r) \quad \left(\text{odstranění výrazu } (E - I \cdot r) \text{ z pravé strany rovnice vydělením rovnice výrazem } (E - I \cdot r) \right)$$

$$n = \frac{I \cdot R}{E - I \cdot r} \quad \left(\text{výměna stran rovnice - konečný výsledek} \right)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

(c) vyjádření r

Při vyjádření této neznámé využijeme úpravy z části (b) tohoto příkladu, a to 2. řádku.

$$I.R + I.n.r = n.E \quad |(-I.R) \quad (\text{osamostatnění výrazu obsahujícího neznámou } r \text{ převedením ostatních výrazů na opačnou stranu rovnice})$$

$$I.n.r = n.E - I.R \quad |:(I.n) \quad (\text{odstranění nové konstanty } I.n \text{ z levé strany rovnice vydělením rovnice výrazem } (I.n))$$

$$r = \frac{n.E - I.R}{I.n} \quad (\text{konečný výsledek})$$

(d) vyjádření R

Při vyjádření této neznámé využijeme úpravy z části (b) tohoto příkladu, a to 3. řádku.

$$I.R = n.E - I.n.r \quad |:I \quad (\text{odstranění konstanty } I \text{ z levé strany rovnice vydělením rovnice konstantou } I)$$

$$R = \frac{n.(E - I.r)}{I} \quad (\text{vytknutí } n \text{ v čitateli výrazu – konečný výsledek})$$

Příklad 6.

Vyjádřete $f; r_1; n$ ze vzorce $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$

Řešení:

(a) vyjádření f

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{sečtení zlomků v druhé závorce na pravé straně rovnice})$$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} \right) \quad (\text{úprava výrazu na pravé straně rovnice převedením na jeden zlomek})$$

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1).(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} \quad (\text{převrácení zlomků na obou stranách rovnice})$$

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1).(r_1 + r_2)} \quad (\text{konečný výsledek})$$

(b) vyjádření r_1

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad |:(n-1) \quad (\text{odstranění } (n-1) \text{ z pravé strany rovnice vydělením rovnice výrazem } (n-1))$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\frac{1}{f \cdot (n-1)} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad / (-\frac{1}{r_2})$$

(osamostatnění neznámé r_1 na pravé straně rovnice)

odečtením výrazu $\frac{1}{r_2}$ od obou stran rovnice)

$$\frac{1}{f \cdot (n-1)} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1}$$

(úprava levé strany rovnice převodem na společný jmenovatel)

$$\frac{r_2 - f \cdot (n-1)}{r_2 \cdot f \cdot (n-1)} = \frac{1}{r_1}$$

(převrácení zlomků na obou stranách rovnice)

$$r_1 = \frac{r_2 \cdot f \cdot (n-1)}{r_2 - f \cdot (n-1)}$$

(výměna stran rovnice - **konečný výsledek**)

(c) vyjádření n

Při vyjádření této neznámé využijeme úpravy z části (a) tohoto příkladu, a to 2. řádku.

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right) \quad / \cdot \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)$$

(odstranění výrazu $\frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2}$ z pravé strany rovnice

vynásobením celé rovnice výrazem $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$)

$$\frac{r_1 r_2}{f \cdot (r_1 + r_2)} = n-1 \quad / +1$$

(odstranění konstanty 1 z pravé strany rovnice přičtením 1 k oběma stranám rovnice)

$$n = \frac{r_1 r_2}{f \cdot (r_1 + r_2)} + 1$$

(výměna stran rovnice - **konečný výsledek**)

Úlohy k procvičování:

1) Vyjádřete $R; V$ ze vzorce $b = \frac{R}{R+V} \cdot a$

Výsledky: $R = \frac{b \cdot V}{a-b}$; $V = \frac{R \cdot (a-b)}{V}$

2) Ze vzorce $S = 2 \cdot \pi \cdot r(r+v)$ vyjádřete v

Výsledek: $v = \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3) Ze vzorce $v = \frac{(d_1 + d_2)v_1v_2}{d_1v_2 + d_2v_1}$ vyjádřete v_1

Výsledek: $v_1 = \frac{vv_2d_1}{v_2d_1 + v_2d_2 - vd_2}$

4) Ze vzorce $s = \frac{1}{2}at^2$ vyjádřete t

Výsledek: $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

5) Ze vzorce $(F - F_T).s = \frac{1}{2}.m.(v^2 - v_0^2)$ vyjádřete m

Výsledek: $v = \sqrt{v_0^2 + 2.s.\frac{F - F_T}{m}}$

6) Ze vzorce $\frac{Q_m}{\rho} = \frac{1}{4}.\pi.d^2.v$ vyjádřete d

Výsledek: $d = \sqrt{\frac{4.Q_m}{\pi.v.\rho}}$

7) Ze vzorce $F.f.v = k.S.(t_1 - t_2)$ vyjádřete t_1

Výsledek: $t_1 = \frac{F.f.v}{k.S} + t_2$

8) Ze vzorce $P_T = c.\rho.Q_v.(t_3 - t_4)$ vyjádřete Q_v

Výsledek: $Q_v = \frac{P_T}{c.\rho.(t_3 - t_4)}$

9) Ze vzorce $\frac{m.v^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = m.g.h$ vyjádřete v

Výsledek: $v = \sqrt{v_0^2 + 2.g.h}$

10) Ze vzorce $\tau_s = \frac{4.F}{\pi.d^2}$ vyjádřete d

Výsledek: $d = \sqrt{\frac{4.F}{\pi.\tau_s}}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

11) Ze vzorce $\sigma_0 = \frac{5 \cdot F_A \cdot l_A}{d_A^3}$ vyjádřete d_A

Výsledek: $d = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot F_A \cdot l_A}{\sigma_0}}$

12) Ze vzorce $F \cdot l = F_{s2} \cdot (a + e^{f \cdot \alpha} \cdot b)$ vyjádřete F_{s2}

Výsledek: $F_{s2} = \frac{F \cdot l}{a + e^{f \cdot \alpha} \cdot b}$