

KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE (početní a grafická řešení)

KVADRATICKÉ ROVNICE (početně)

Teorie:

Kvadratická rovnice o jedné neznámé se nazývá každá taková rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na tvar:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad b, c \in \mathbb{R}; \quad x \in D$$

x ... je **neznámá z příslušného definičního oboru rovnice** (nejčastěji množina $\mathbb{R}$)

a, b, c ... jsou **koeficienty kvadratické rovnice**, přičemž

a kvadratický koeficient
 b lineární koeficient
 c absolutní koeficient.....kvadratické rovnice

Jednotlivým členům v zápisu kvadratické rovnice také říkáme:

ax^2 kvadratický člen
 bx lineární člen
 c absolutní člen resp. koeficient.....kvadratické rovnice

Diskuse kvadratické rovnice:

1) $ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$

obecný tvar kvadratické rovnice

Tento obecný tvar dále upravujeme ...

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad / \cdot \frac{1}{a}; \quad a \neq 0$$

... a dostáváme se ke tvaru:

2) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$x^2 + px + q = 0; \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$$

normovaný tvar kvadratické rovnice

3) $a \neq 0; \quad b \neq 0; \quad c = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ax^2 + bx = 0$$

kvadratická rovnice bez absolutního členu
(neúplná kvadratická rovnice)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

tuto rovnici **řešíme pomocí vytýkání** společného výrazu před závorku:

$$x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0 \vee ax + b = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$K = \left\{0; -\frac{b}{a}\right\}$$

kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny $x_{1,2}$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

4) $a \neq 0; b = 0; c = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ax^2 = 0$$

kvadratická rovnice bez lineárního a absolutního členu (neúplná kvadratická rovnice)

tuto rovnici dále řešíme:

$$ax^2 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{a}$$

$$x^2 = 0$$

$$\underline{x_{1,2} = 0}$$

$$K = \{0\}$$

kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný R-kořen
(a to číslo „0“)

množina kořenů dané kvadratické rovnice

5) $a \neq 0; b = 0; c \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ax^2 + c = 0$$

kvadratická rovnice bez lineárního členu tzv.
ryze kvadratická rovnice
(neúplná kvadratická rovnice)

$a; c$ – mají stejná znaménka

$\Rightarrow K = \emptyset$ množina kořenů
kvadratické rovnice
je prázdná

$a; c$ – mají rozdílná znaménka

$$ax^2 = -c \quad / \cdot \frac{1}{a}$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

(výraz pod odmocninou je ve
skutečnosti kladný)

$$\underline{x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

rovnice má dva různé

R-kořeny (dvě navzájem
opačná čísla)

$$K = \left\{\sqrt{-\frac{c}{a}}; -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$$

**kořeny ryze kvadratické
rovnice**

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6) $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

úplná kvadratická rovnice

Rovnici nejprve řešíme výpočtem tzv. **diskriminantu** kvadratické rovnice:

Vzorec pro VÝPOČET DISKRIMINANTU KVADRATICKÉ ROVNICE:

$$D = b^2 - 4ac$$

Aby kvadratická rovnice měla R-kořeny, musí být $D \geq 0$

Je-li $D > 0 \Rightarrow$ kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny, které vypočteme podle

VZORCE PRO VÝPOČET KOŘENŮ KVADRATICKÉ ROVNICE:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Je-li $D = 0 \Rightarrow$ kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen, které vypočteme podle

upraveného předchozího VZORCE:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

Je-li $D < 0 \Rightarrow$ kvadratická rovnice nemá žádné reálné kořeny $\Rightarrow$ množina kořenů rovnice je prázdná.

Řešené úlohy:

Příklad 1.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$3x^2 + 9 = 0$$

Řešení:

Rovnici upravíme na tvar:

$$3x^2 = -9 \quad / : \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 = -3 \quad \text{protože žádné R číslo umocněné na druhou není rovno číslu zápornému} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \emptyset \quad \text{rovnice nemá řešení v R (množina kořenů je prázdná)}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$3x^2 - 9 = 0$$

Řešení:

Rovnici upravíme na tvar:

$$3x^2 = 9 \quad / : \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 = 3$$

$$|x| = \sqrt{3}$$

$$x_1 = \sqrt{3}; \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow K = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$$

kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny (vzájemně opačná čísla)

[množina kořenů dané kvadratické rovnice](#)

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 3.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$\frac{9}{2}x^2 = 9x$$

Řešení:

$$\frac{9}{2}x^2 = 9x \quad / : 2$$

$$9x^2 = 18x$$

$$9x^2 - 18x = 0$$

$$9x \cdot (x - 2) = 0$$

$$\underline{x_1 = 0}$$

✓

$$x - 2 = 0$$

$$\underline{x_2 = 2}$$

odstraníme zlomek (celou rovnici vynásobíme číslem 2)

převédeme neznámou na jednu stranu rovnice

na levé straně vytkneme společný člen a tím převédeme rovnici na součin

součin je roven nule, rovná-li se nule některý z uvedených výrazů

dva různé R-kořeny dané kvadratické rovnice

$$K = \{0; 2\}$$

[množina kořenů dané kvadratické rovnice](#)

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 4.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$$

Řešení:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0 \quad | \cdot 2$$

$$-x^2 + 6x = 0$$

$$x \cdot (-x + 6) = 0$$

$$\underline{x_1 = 0}$$

∨

$$\underline{-x + 6 = 0}$$

$$\underline{x_2 = 6}$$

odstraníme zlomek (celou rovnici vynásobíme číslem 2)

na levé straně vytkneme společný člen a tím převedeme rovnici na součin

součin je roven nule, rovná-li se nule některý z uvedených výrazů

dva různé R-kořeny dané kvadratické rovnice

$$K = \{0; 6\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 5.

Řešte v R rovnici o neznámé x :

$$(x + 3) \cdot (2x - 5) = 0$$

Řešení:

$$(x + 3) \cdot (2x - 5) = 0$$

$$\underline{x + 3 = 0}$$

$$\underline{x_1 = -3}$$

∨

$$\underline{2x - 5 = 0}$$

$$\underline{x_2 = \frac{5}{2}}$$

součin je roven nule, rovná-li se nule některý z uvedených výrazů

dva různé R-kořeny dané kvadratické rovnice

$$K = \left\{ -3; \frac{5}{2} \right\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 6.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$2x^2 - 9 = 0$$

Řešení:

Rovnici upravíme na tvar:

$$2x^2 = 9 \quad / \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$|x| = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$K = \left\{ \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny (vzájemně opačná čísla)

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Příklad 7.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$9x^2 - 16 = 0$$

Řešení:

Rovnici upravíme na tvar:

$$9x^2 - 16 = 0$$

$$9x^2 = 16 \quad / \cdot \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$x^2 = \frac{16}{9}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$|x| = \frac{4}{3}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$K = \left\{ \frac{4}{3}; -\frac{4}{3} \right\}$$

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 8.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 4 = 0$$

Řešení:

Rovnici upravíme například na tvar:

$$(x - 2) \cdot (x + 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$\underline{x_1 = 2} \quad \quad \quad \underline{x_2 = -2}$$

$$K = \{\pm 2\}$$

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 9.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 7 = 0$$

Řešení:

Rovnici upravíme například na tvar:

$$(x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7}) = 0$$

$$x - \sqrt{7} = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{7} = 0$$

$$\underline{x_1 = \sqrt{7}} \quad \quad \quad \underline{x_2 = -\sqrt{7}}$$

$$K = \{\pm \sqrt{7}\}$$

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny (vzájemně opačná čísla)

množina kořenů dané kvadratické rovnice

součin je roven nule, rovná-li se nule některý z uvedených výrazů

dva různé R-kořeny dané kvadratické rovnice

množina kořenů dané kvadratické rovnice

součin je roven nule, rovná-li se nule některý z uvedených výrazů

dva různé R-kořeny dané kvadratické rovnice

množina kořenů dané kvadratické rovnice



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 10.

Řešte v R rovnici o neznámé x :

$$(2x + 11)^2 = 0$$

Řešení:

$$(2x + 11)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x + 11) \cdot (2x + 11) = 0$$

$$2x + 11 = 0$$

$$\underline{\underline{x_{1,2} = -\frac{11}{2}}}$$

jeden dvojnásobný R-kořen

$$K = \left\{ -\frac{11}{2} \right\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 11.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Řešení:

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 1; b = 1; c = 1$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

$$D < 0 \Rightarrow K = \emptyset$$

rovnice nemá řešení v R (množina kořenů rovnice je prázdná)

Příklad 12.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$3x^2 + x - 10 = 0$$

Řešení:

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 3; b = 1; c = -10$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 1 + 120 = 121$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$D > 0 \Rightarrow$$

kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny $x_{1,2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 11}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = -\frac{12}{6} = -2$$

$$K = \left\{ -2; \frac{5}{3} \right\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 13.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

Řešení:

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 3; b = -5; c = -2$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$$

$$D > 0 \Rightarrow$$

kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny $x_{1,2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$K = \left\{ 2; -\frac{1}{3} \right\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 14.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Řešení:

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 1; b = 4; c = 2$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2) = 16 - 8 = 8$$

$$D > 0 \Rightarrow$$

kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny $x_{1,2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot (-2 \pm \sqrt{2})}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -2 + \sqrt{2}}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = -2 - \sqrt{2}}}$$

$$K = \{-2 \pm \sqrt{2}\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 15.

Řešte v R kvadratickou rovnici:

$$3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

Řešení:

Rovnici nejprve upravíme na tvar, ve kterém se nevyskytují zlomky:

$$3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0 \quad / \cdot 3$$

celou rovnici vynásobíme číslem 3

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 9; b = -6; c = 1$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$D = 0 \Rightarrow$$

kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný R-kořen $x_{1,2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 16.

Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$!

$$2x - 1 + \frac{1}{2x+1} = 2$$

Řešení:

Nejprve uvedeme podmínky řešitelnosti rovnice: $\left[x \neq -\frac{1}{2} \right]$ (tzn. kořenem rovnice nesmí být číslo $\left(-\frac{1}{2} \right)$)

Dále rovnici s neznámou ve jmenovateli upravujeme pomocí ekvivalentních úprav

$$2x - 1 + \frac{1}{2x+1} = 2 \quad | \cdot (2x+1) \quad \text{odstranění zlomku z rovnice}$$

$$2x \cdot (2x+1) - 1 \cdot (2x+1) + 1 = 2 \cdot (2x+1) \quad \text{roznásobení závorek}$$

$$4x^2 + 2x - 2x - 1 + 1 = 4x + 2 \quad \text{převedení všech členů rovnice na jednu stranu rovnice}$$

$$4x^2 + 2x - 2x - 1 + 1 - 4x - 2 = 0 \quad \text{další úpravy rovnice}$$

$$4x^2 - 4x - 2 = 0 \quad | \cdot \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{kvadratická rovnice, kterou již dále zjednodušit nelze}$$

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 2; b = -2; c = -1$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 4 + 8 = 12$$

$$D > 0 \Rightarrow \quad \text{kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny } x_{1,2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2 \cdot (1 \pm \sqrt{3})}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} ; x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$K = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \right\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 17.

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$!

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{x+2}$$

Řešení:

Nejprve uvedeme podmínky řešitelnosti rovnice: $[x \neq 4; -2]$ (tzn. kořeny rovnice nesmí být čísla 4 a (-2))

Rovnici s neznámou ve jmenovateli nejprve upravujeme pomocí ekvivalentních úprav

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{x+2} \quad / \cdot 8 \cdot (x-4) \cdot (x+2) \quad \text{odstranění zlomků z rovnice}$$

$$3 \cdot (x-4) \cdot (x+2) - 8 \cdot (x+2) = -1 \cdot 8 \cdot (x-4) \quad \text{roznásobení závorek}$$

$$3 \cdot (x^2 + 2x - 4x - 8) - 8x - 16 = -8x + 32 \quad \text{roznásobení závorek}$$

$$3x^2 + 6x - 12x - 24 - 8x - 16 = -8x + 32 \quad \text{převedení všech členů rovnice na jednu stranu rovnice}$$

$$3x^2 + 6x - 12x - 24 - 8x - 16 + 8x - 32 = 0 \quad \text{další úpravy rovnice}$$

$$3x^2 - 6x - 72 = 0 \quad / \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0 \quad \text{kvadratická rovnice, kterou již dále zjednodušit nelze}$$

Tuto kvadratickou rovnici lze dále řešit dvěma různými způsoby: jednak **pomocí vzorce pro výpočet diskriminantu kvadratické rovnice a kořenů kvadratické rovnice** nebo **užitím rozkladu kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů** (již dříve probrané učivo – viz úpravy algebraických výrazů).

1. způsob řešení: užitím vzorců pro diskriminant a kořeny kvadratické rovnice: Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 1; b = -2; c = -24$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100$$

$$D > 0 \Rightarrow \quad \text{kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny } x_{1,2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 10}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = \frac{12}{2} = 6} ; \quad \underline{x_2 = \frac{-8}{2} = -4}$$

$$K = \{6; -4\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

2. způsob řešení: rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů (řešeno z paměti):

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

obecný vztah; $x_{1,2}$ jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$(x - \quad) \cdot (x - \quad) = 0$$

$$(x - 6) \cdot (x + 4) = 0$$

$$x - 6 = 0$$

$$\underline{x_1 = 6}$$

✓

$$x + 4 = 0$$

$$\underline{x_2 = -4}$$

$$K = \{6; -4\}$$

kořeny kvadratické rovnice se odhadnou na základě již získaných znalostí z 1. ročníku studia SPŠ
součin je roven nule, rovná-li se nule některý z uvedených výrazů

dva různé R-kořeny dané kvadratické rovnice

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 18.

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$!

$$(x - 3)^2 + (x - 4)^2 = (x - 2)^2$$

Řešení:

Rovnici s neznámou ve jmenovateli nejprve upravujeme pomocí ekvivalentních úprav

$$(x - 3)^2 + (x - 4)^2 = (x - 2)^2$$

výrazy v závorkách upravíme pomocí vzorců $(a \pm b)^2$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 = x^2 - 4x + 4$$

převedení všech členů rovnice na jednu stranu rovnice

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

další úpravy rovnice

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

kvadratická rovnice, kterou již dále zjednodušit nelze

Tuto kvadratickou rovnici lze dále řešit dvěma různými způsoby: jednak pomocí vzorce pro výpočet diskriminantu kvadratické rovnice a kořenů kvadratické rovnice nebo užitím rozkladu kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů (již dříve probrané učivo – viz úpravy algebraických výrazů).

1. způsob řešení: užitím vzorců pro diskriminant a kořeny kvadratické rovnice: Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 1; b = -10; c = 21$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (21) = 100 - 84 = 16$$

$$D > 0 \Rightarrow$$

kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny $x_{1,2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = \frac{14}{2} = 7} ; \quad \underline{x_2 = \frac{6}{2} = 3}$$

$$K = \{7; 3\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

2. způsob řešení: rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů (řešeno z paměti):

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$(x - \quad) \cdot (x - \quad) = 0$$

$$(x - 7) \cdot (x - 3) = 0$$

$$x - 7 = 0$$

$$\underline{x_1 = 7}$$

∨

$$x - 3 = 0$$

$$\underline{x_2 = 3}$$

$$K = \{7; 3\}$$

obecný vztah; $x_{1,2}$ jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice

kořeny kvadratické rovnice se odhadnou na základě již získaných znalostí z 1. ročníku studia SPŠ
součin je roven nule, rovná-li se nule některý z uvedených výrazů

dva různé R-kořeny dané kvadratické rovnice

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

Příklad 19.

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$!

$$\frac{x-13}{13} = \frac{13}{x+13}$$

Řešení:

Nejprve uvedeme podmínky řešitelnosti rovnice: $[x \neq -13]$ (tzn. kořenem rovnice nesmí být číslo (-13)).

Rovnici s neznámou ve jmenovateli nejprve upravujeme pomocí ekvivalentních úprav

$$\frac{x-13}{13} = \frac{13}{x+13}$$

/. $13 \cdot (x+13)$ odstranění zlomků z rovnice

$$(x-13) \cdot (x+13) = 169$$

roznásobení závorek

$$x^2 + 13x - 13x - 169 = 169$$

úprava rovnice

$$x^2 = 338$$

neúplná kvadratická rovnice (ryze kvadratická rovnice)

$$|x| = \sqrt{338}$$

$$|x| = \sqrt{2 \cdot 169} = 13\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 13\sqrt{2}; \quad x_2 = -13\sqrt{2}}}$$

dva různé R-kořeny kvadratické rovnice (navzájem opačná čísla)

$$K = \{\pm 13\sqrt{2}\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 20.

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$!

$$\frac{7+x}{3x-1} - \frac{5}{2x} = \frac{3}{3x^2-x}$$

Řešení:

Nejprve uvedeme podmínky řešitelnosti rovnice: $\left[x \neq \frac{1}{3}; 0 \right]$ (tzn. kořenem rovnice nesmí být čísla 0 a $\frac{1}{3}$)

Dále rovnici s neznámou ve jmenovateli upravujeme pomocí ekvivalentních úprav

$$\frac{7+x}{3x-1} - \frac{5}{2x} = \frac{3}{3x^2-x} \quad \text{úprava jmenovatele 3. zlomku rovnice}$$

$$\frac{7+x}{3x-1} - \frac{5}{2x} = \frac{3}{x \cdot (3x-1)} \quad / \cdot 2x(3x-1) \quad \text{odstranění zlomků z rovnice}$$

$$(7+x) \cdot 2x - 5 \cdot (3x-1) = 3 \cdot 2 \quad \text{roznásobení závorek}$$

$$14x + 2x^2 - 15x + 5 = 6 \quad \text{úprava rovnice}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{kvadratická rovnice, kterou již dále zjednodušit nelze}$$

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici ($a = 2; b = -1; c = -1$) $\Rightarrow$ vypočteme diskriminant kvadratické rovnice podle vzorce:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$D > 0 \Rightarrow \quad \text{kvadratická rovnice má dva různé R-kořeny } x_{1,2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = \frac{4}{4} = 1} ; \underline{x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}}$$

$$K = \left\{ 1; -\frac{1}{2} \right\}$$

množina kořenů dané kvadratické rovnice

Provedení zkoušky ponecháváme na čtenáři.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úlohy k procvičování:

Řešte rovnice o neznámé $x \in R$!

1) $(5 - 3x) \cdot (-2x - 5) = 0$

2) $-5x + 6x^2 = 0$

3) $-7x^2 + 19x = 0$

4) $x^2 + 5 = 0$

5) $3x^2 - 11 = 0$

6) $(x - 5)^2 = 0$

7) $x^2 + 10x + 16 = 0$

8) $2x^2 + 6x + 5 = 0$

9) $2x^2 + 6x + \frac{9}{2} = 0$

10) $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$

11) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

12) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

13) $4x^2 + x + 3 = 0$

14) $6x^2 + 7x + 1 = 0$

15) $-3x^2 + 5x - 3 = 0$

16) $\frac{1}{2}x^2 + 6x - 32 = 0$

17) $x^2 - 6x + 9 = 0$

18) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

19) $9x^2 + 12x = -4$

20) $3x^2 + \frac{1}{2}x = 0$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$21) \frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$$

$$22) (2x+1)(x-3) + (2x-1)(x+2) = 4x-1$$

$$23) \frac{1}{x+4} - \frac{4}{x-4} + \frac{x^2-20}{x-16}$$

$$24) \frac{2}{1-x} - \frac{7}{x+1} = \frac{3}{x}$$

$$25) \frac{6}{1-x} + \frac{5}{x+1} = \frac{6}{x-2}$$

$$26) 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2+x}$$

$$27) \frac{x\sqrt{2}}{2x-\sqrt{2}} = \frac{2x}{x\sqrt{2}-3}$$

$$28) \frac{x+3}{3-x} = \frac{x-1}{x-5} - 4$$

$$29) \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$$

Výsledky:

- | | | | | | |
|--|---------------------------------|------------------------|-----------------------|--|-----------------------|
| 1) $\frac{5}{3}; -\frac{5}{2}$ | 2) $0; \frac{5}{6}$ | 3) $0; \frac{19}{7}$ | 4) $\emptyset$ | 5) $\sqrt{\frac{11}{3}}; -\sqrt{\frac{11}{3}}$ | 6) 5 |
| 7) $-2; -8$ | 8) $\emptyset$ | 9) $-1; 5$ | 10) $-3; \frac{3}{2}$ | 11) $\frac{-5+\sqrt{13}}{6}; \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$ | |
| 12) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}; \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ | 13) $\emptyset$ | 14) $-1; -\frac{1}{6}$ | 15) $\emptyset$ | 16) $4; -16$ | |
| 17) 3 | 18) $\frac{1}{4}$ | 19) $-\frac{2}{3}$ | 20) $0; -\frac{1}{6}$ | 21) $5; -\frac{5}{6}$ | 22) $2; -\frac{1}{2}$ |
| 23) $8; -5$ | 24) $\frac{3}{4}; -\frac{1}{3}$ | 25) $4; \frac{1}{5}$ | 26) 1 | 27) $0; -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 28) $4; 9$ |
| 29) $0; 3$ | | | | | |

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KVADRATICKÉ ROVNICE (graficky)

Teorie:

Grafické řešení kvadratické rovnice spočívá ve dvou možných způsobech řešení:

- 1) **Kvadratickou rovnici upravíme na obecný tvar kvadratické rovnice.** Levou stranu v zápisu rovnice pak **považujeme za funkční předpis jedné** (kvadratické) **funkce** a **pravou stranu** rovnice považujeme **za předpis druhé** (konstantní) **funkce** – viz níže. **Grafy takovýchto funkcí zakreslíme do téhož souřadnicového systému 0xy a nalezneme jejich průsečíky** (tj. průsečíky paraboly s osou x). V těchto bodech jsou si obě funkce rovny. X -ové souřadnice průsečíků grafů paraboly s osou x (tj. společných bodů obou funkcí), jsou pak kořeny původní kvadratické rovnice.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

f(x)

jedná se o funkční
předpis kvadratické
funkce

$y = ax^2 + bx + c$
grafem bude
parabola

g(x)

jedná se o funkční
předpis konstantní
funkce $y = 0$

grafem je přímka;
v tomto případě –
osa x

Následně grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ zakreslíme
v 0xy a porovnáme, pro která x platí: **$f(x) = g(x)$**

- 2) Kvadratickou rovnici upravíme na níže uvedený ekvivalentní tvar. **Levou stranu** v zápisu rovnice **považujeme za funkční předpis jedné** (základní kvadratické) **funkce** a **pravou stranu** rovnice považujeme **za předpis druhé** (lineární) **funkce** – viz níže. **Grafy takovýchto funkcí zakreslíme do téhož souřadnicového systému 0xy a nalezneme jejich průsečíky** (tj. průsečíky paraboly s přímkou). V těchto bodech jsou si obě funkce rovny. X -ové souřadnice průsečíků grafů těchto dvou funkcí, jsou pak kořeny původní kvadratické rovnice.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 = -bx - c$$

$$/ \cdot \left(\frac{1}{a} \right)$$

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

f(x)

jedná se o funkční
předpis základní
kvadratické funkce

$y = x^2$
grafem bude parabola

g(x)

jedná se o funkční
předpis pro lineární

funkci $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$
grafem je přímka

Následně grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ zakreslíme v 0xy a
porovnáme, pro která x platí: **$f(x) = g(x)$**

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešené úlohy:

Příklad 1.

Řešte graficky rovnici:

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Řešení:

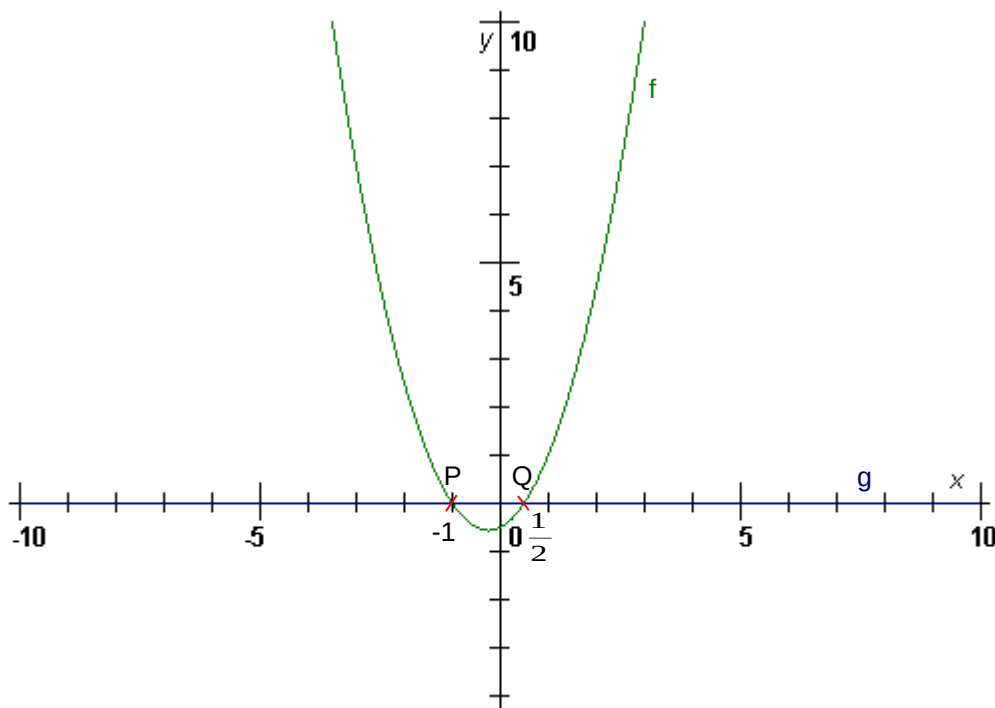
1. způsob řešení:

1) Levou stranu rovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, kterou sestojíme podle již známých pravidel (viz předcházející kapitola – kvadratické funkce).

2) Pravou stranu rovnice považujeme za předpis konstantní funkce $g(x)$: $y = 0 \Rightarrow$ grafem je přímka (osa x).

3) Sestojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



4) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce g (průsečíky paraboly funkce f s osou x) $\Rightarrow$ x -ové souřadnice těchto průsečíků jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice (**dva průsečíky**). Přímka g je sečnou paraboly f (**dva společné body**).

5) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice:

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad / :2$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = \frac{1}{2}}; \underline{x_2 = -1}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{2}; -1 \right\}$$

množina kořenů příslušné kvadratické rovnice je dvouprvková

2. způsob řešení:

1) Původní kvadratickou rovnici upravíme na ekvivalentní tvar: $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

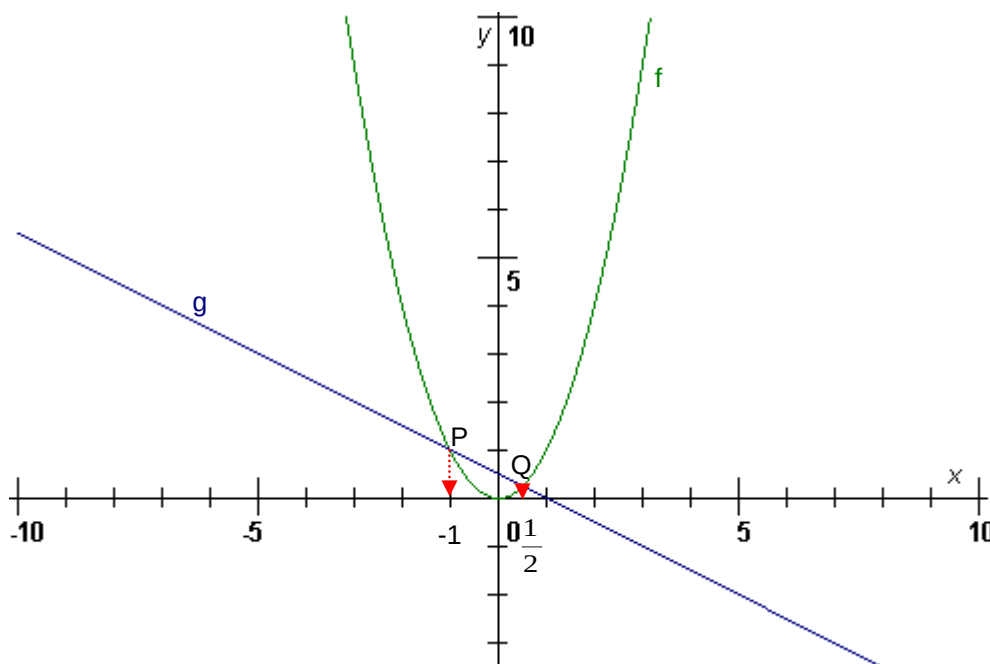
Takto upravenou rovnici řešíme obdobně jako u 1. způsobu řešení.

2) Levou stranu rovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 \Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, která má vrchol v počátku souřadnicového systému a „je otevřena směrem nahoru“. Další vlastnosti této funkce jsou nám známy již z předcházející kapitoly – kvadratické funkce.

3) Pravou stranu rovnice považujeme za předpis lineární funkce $g(x)$: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow$ grafem je

klesající přímka procházející např. body $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ a $[1; 0]$

4) Sestrojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce $g \Rightarrow$ x-ové souřadnice těchto průsečíků jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice (**dva průsečíky**). Přímka g je sečnou paraboly f (**dva společné body**).

6) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice (viz výše).

Příklad 2.

Řešte graficky rovnici:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

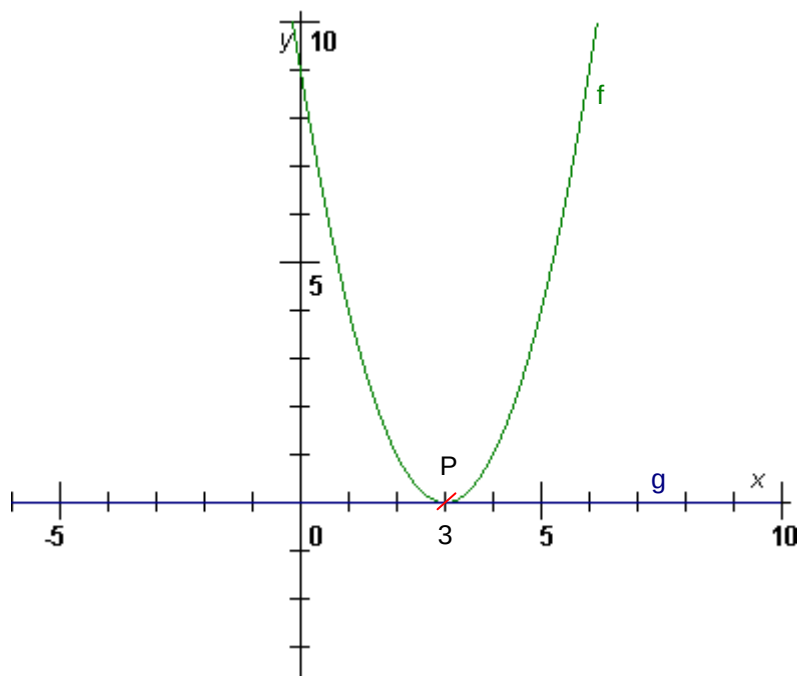
Řešení:

1. způsob řešení:

1) Levou stranu rovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, kterou sestojíme podle již známých pravidel (viz předcházející kapitola – kvadratické funkce).

2) Pravou stranu rovnice považujeme za předpis konstantní funkce $g(x)$: $y = 0 \Rightarrow$ grafem je přímka (osa x).

3) Sestojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



4) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce g (průsečíky paraboly funkce f s osou x) $\Rightarrow$ x-ové souřadnice těchto průsečíků jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice (**jeden průsečík**). Přímka g je tečnou paraboly f (**jeden společný bod**).

5) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = 3}}$$

$$K = \{3\}$$

množina kořenů příslušné kvadratické rovnice je jednoprvková

2. způsob řešení:

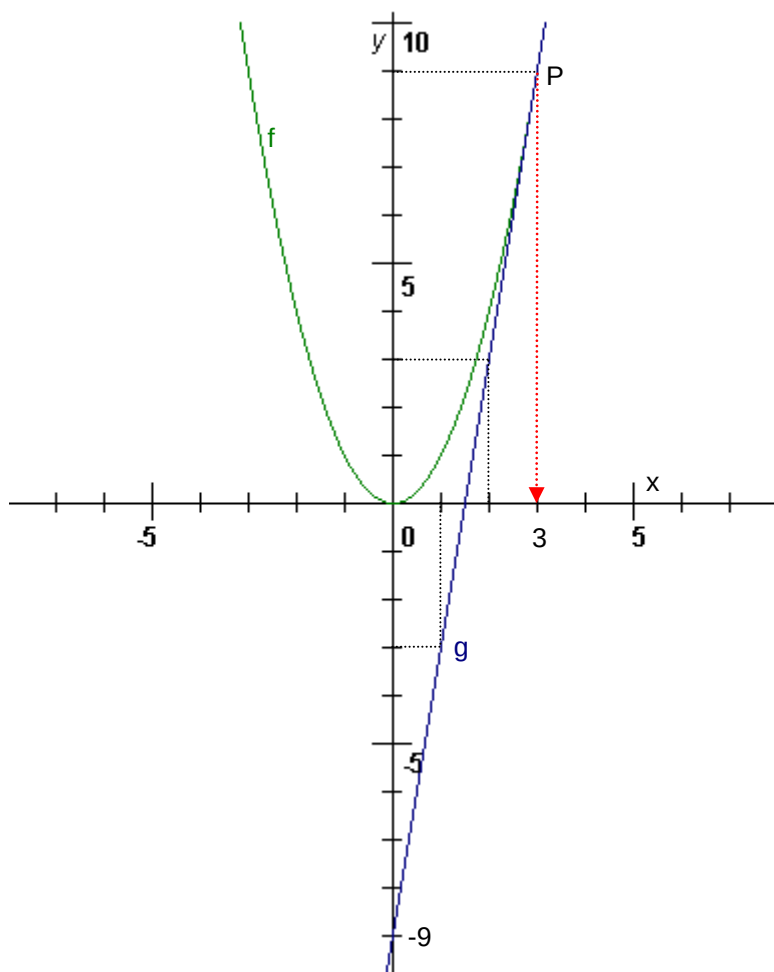
1) Původní kvadratickou rovnici upravíme na ekvivalentní tvar: $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6x - 9$

Takto upravenou rovnici řešíme obdobně jako u 1. způsobu řešení.

2) Levou stranu rovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 \Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, která má vrchol v počátku souřadnicového systému a „je otevřena směrem nahoru“. Další vlastnosti této funkce jsou Vám známy již z předcházející kapitoly – kvadratické funkce.

3) Pravou stranu rovnice považujeme za předpis lineární funkce $g(x)$: $y = 6x - 9 \Rightarrow$ grafem je rostoucí přímka procházející např. body $[1; -3]$ a $[2; 3]$

4) Sestrojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce $g \Rightarrow$ x-ové souřadnice těchto průsečíků jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice (**jeden průsečík**). Přímka g je tečnou paraboly f (**jeden společný bod**).

6) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice (viz výše).

Příklad 3.

Řešte graficky rovnici:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

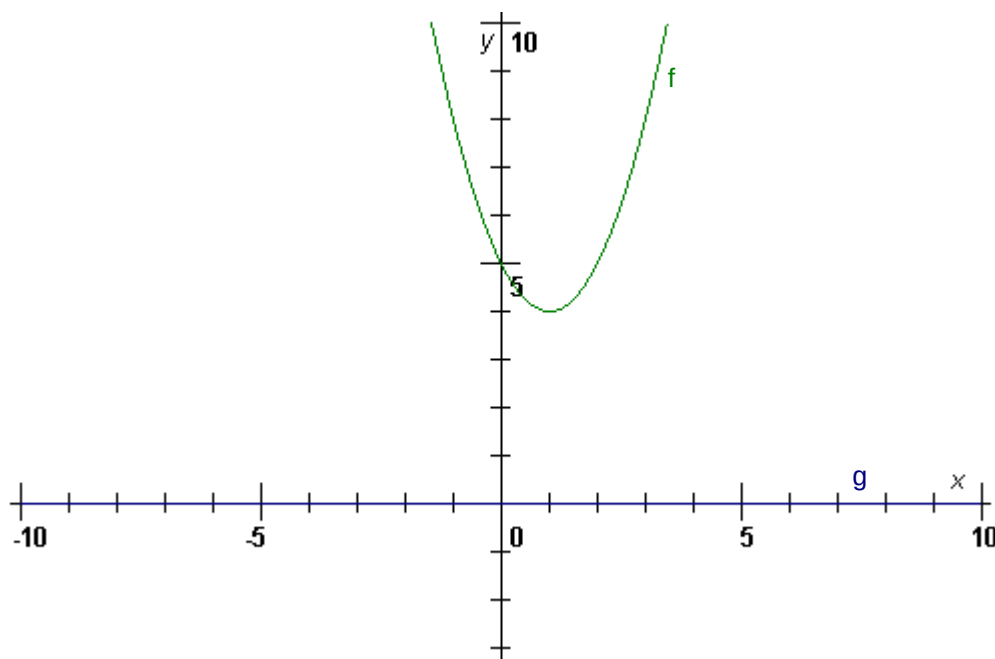
Řešení:

1. způsob řešení:

1) Levou stranu rovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, kterou sestojíme podle již známých pravidel (viz předcházející kapitola – kvadratické funkce).

2) Pravou stranu rovnice považujeme za předpis konstantní funkce $g(x)$: $y = 0 \Rightarrow$ grafem je přímka (osa x).

3) Sestojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



4) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce g (průsečíky paraboly funkce f s osou x) $\Rightarrow$ x-ové souřadnice těchto průsečíků jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice (**žádný průsečík**). Přímka g je vnější přímkou paraboly f (**žádný společný bod**).

5) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D < 0 \Rightarrow K = \emptyset$$

množina kořenů příslušné kvadratické rovnice je prázdná

2. způsob řešení:

1) Původní kvadratickou rovnici upravíme na ekvivalentní tvar: $x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2x - 5$

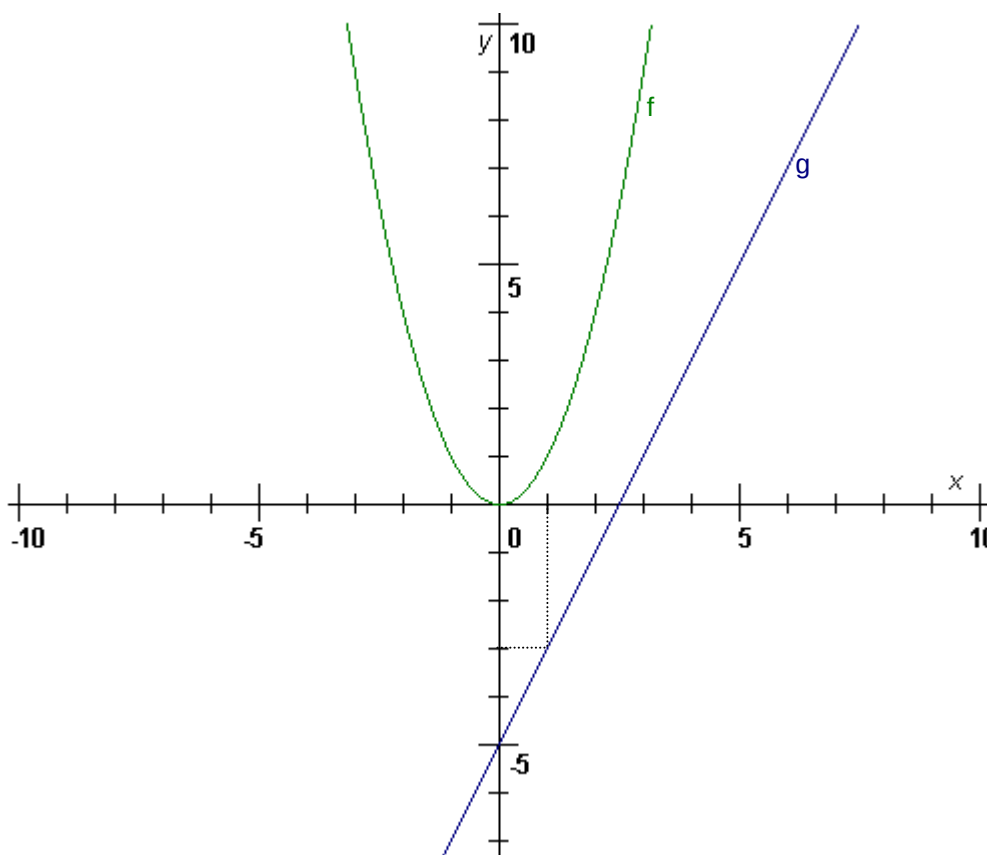
Takto upravenou rovnici řešíme obdobně jako u 1. způsobu řešení.

2)) Levou stranu rovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, která má vrchol v počátku souřadnicového systému a „je otevřena směrem nahoru“. Další vlastnosti této funkce jsou Vám známy již z předcházející kapitoly – kvadratické funkce.

3) Pravou stranu rovnice považujeme za předpis lineární funkce $g(x)$: $y = 2x - 5 \Rightarrow$ grafem je rostoucí přímka procházející např. body $[0; -5]$ a $[1; -3]$

4) Sestrojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



5) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce $g \Rightarrow$ x-ové souřadnice těchto průsečíků jsou kořeny příslušné kvadratické rovnice (**žádný průsečík**). Přímka g je vnější přímkou paraboly f (**žádný společný bod**).

6) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice (viz výše).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úlohy k procvičování:

Řešte graficky rovnice !

1) $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$

2) $x^2 - 4x + 3 = 0$

3) $x^2 - 4x + 5 = 0$

4) $\frac{1}{2}x^2 = -2x - 2$

5) $2x^2 = 3x - 4$

6) $4x^2 - 4x = 3$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KVADRATICKÉ NEROVNICE (početně)

Teorie:

Kvadratická nerovnice o jedné neznámé se nazývá každá nerovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na jeden z tvarů:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &\geq 0 \\ ax^2 + bx + c &\leq 0 \\ ax^2 + bx + c &> 0 \\ ax^2 + bx + c &< 0 \\ a &\in \mathbb{R} - \{0\}, \quad b, c \in \mathbb{R}; \quad x \in D \end{aligned}$$

$x \dots$ je **neznámá z příslušného definičního oboru rovnice** (nejčastěji množina $\mathbb{R}$)

Řešené úlohy:

Příklad 1.

Řešte nerovnici $x^2 - 3x - 10 \leq 0$!

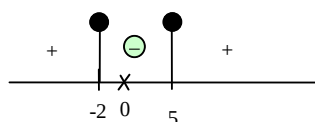
Řešení:

Levou stranu nerovnice lze rozložit na součin kořenových činitelů užitím Vietových vzorců:

$$x^2 - 3x - 10 \leq 0$$

$$(x + 2) \cdot (x - 5) \leq 0$$

nulové body: $(-2); 5$



$$\underline{K = \langle -2; 5 \rangle}$$

množina všech řešení nerovnice

Příklad 2.

Řešte nerovnici $3x^2 - 5x - 2 \geq 0$!

Řešení:

Levou stranu nerovnice rozložíme na součin kořenových činitelů. Nejprve musíme vypočítat kořeny příslušné kvadratické rovnice:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

užitím vzorce pro diskriminant a výpočet kořenů kvadratické rovnice nalezneme kořeny

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$$

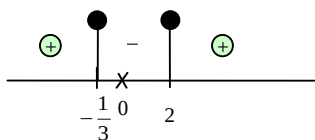
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{12}{6} = 2; \quad x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Levou stranu nerovnice nyní můžeme zapsat ve tvaru součinu kořenových činitelů:

$$3(x - 2) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \geq 0$$

nerovnici dále řešíme metodou nulových bodů známou
z dříve probírané látky

nulové body: $2; \left(-\frac{1}{3}\right)$



$$K = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \langle 2; \infty \rangle$$

množina všech řešení nerovnice

Příklad 3.

Řešte nerovnici $x^2 - 4x - 5 > 0$!

Řešení:

Levou stranu nerovnice lze rozložit na součin kořenových činitelů užitím Vietových vzorců:

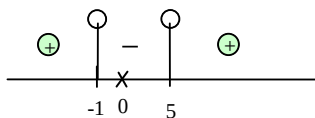
$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

užijeme Vietových vzorců; dostaneme nerovnici
v součinném tvaru

$$(x - 5) \cdot (x + 1) > 0$$

nerovnici dále řešíme metodou nulových bodů známou
z dříve probírané látky

nulové body: $(-1); 5$



$$K = (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$$

množina všech řešení nerovnice

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 4.

Řešte nerovnici $-5x^2 + 3x + 2 > 0$!

Řešení:

Nerovnici nejprve upravíme tak, aby nezačínala koeficientem (-1) u kvadratického členu:

$$-5x^2 + 3x + 2 > 0$$

$/ \cdot (-1)$

vynásobením nerovnice záporným číslem mění nerovnice znaménko nerovnosti na opačné

$$5x^2 - 3x - 2 < 0$$

levou stranu nerovnice rozložíme na součin kořenových činitelů užitím Vietových vzorců. Nejprve však nalezneme kořeny příslušné kvadratické rovnice:

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 9 + 40 = 49$$

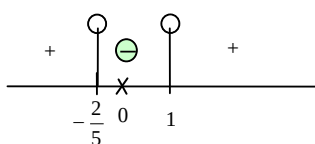
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{3 \pm 7}{10}$$

$$x_1 = \frac{10}{10} = 1; \quad x_2 = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$5(x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$$

nerovnici dále řešíme metodou nulových bodů známou z dříve probírané látky

nulové body: $1; \left(-\frac{2}{5}\right)$



$$K = \left(-\frac{2}{5}; 1\right)$$

množina všech řešení nerovnice

Příklad 5.

Řešte nerovnice:

- a) $4x^2 + 4x + 1 < 0$
- b) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$
- c) $4x^2 + 4x + 1 > 0$
- d) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$

Řešení:

Levou stranu všech nerovnic představuje stejný kvadratický trojčlen. Tuto levou stranu nerovnice se následně pokusíme rozložit na součin kořenových činitelů. Proto nejprve musíme vypočítat kořeny příslušné kvadratické rovnice:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

uvědomíme si, že levá strana rovnice představuje vzorec $(a + b)^2$

$$(2x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný R-kořen

$$a) (2x + 1)^2 < 0$$

pro každé reálné číslo x platí, že $(2x + 1)^2 \geq 0$ tj. na levé straně rovnice získáme vždy nezáporné číslo $\Rightarrow$ nerovnice **nemá žádné řešení**

$$K = \emptyset$$

$$b) (2x + 1)^2 \leq 0$$

pro každé reálné číslo x platí, že $(2x + 1)^2 \geq 0$ tzn. že nerovnice je splněna jen právě tehdy, je-li $(2x + 1)^2 = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{nerovnice má jediné řešení}$$

$$K = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$c) (2x + 1)^2 > 0$$

zjistíme, pro která x je výraz na levé straně nerovnice kladný; protože pro každé reálné číslo x platí, že $(2x + 1)^2 \geq 0$ tj. na levá strana nerovnice je vždy

nezáporné číslo; pouze pro $x = -\frac{1}{2}$ je výraz roven nule

$\Rightarrow$ řešením nerovnice je jakékoli R-číslo, kromě čísla $(-0,5)$

$$K = R - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$d) (2x + 1)^2 \geq 0$$

pro každé reálné číslo x platí, že $(2x + 1)^2 \geq 0$ tj. na levé straně rovnice získáme vždy nezáporné číslo $\Rightarrow$ za x můžeme do nerovnice dosadit jakékoli R-číslo a výraz bude po umocnění na druhou vždy kladný nebo roven nule $\Rightarrow$ nerovnice **má nekonečně mnoho řešení**

$$K = R$$

Příklad 6.

Řešte nerovnici $3x^2 - 5x + 6 < 0$!

Řešení:

Levou stranu nerovnice se pokusíme rozložit na součin kořenových činitelů. Nejprve musíme vypočítat kořeny příslušné kvadratické rovnice:

$$3x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 25 - 72 = -47 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$\Rightarrow$ příslušná kvadratická rovnice nemá řešení v množině $\mathbb{R}$ -čísels $\Rightarrow$ rovnici nelze rozložit na součin kořenových činitelů

V takovém případě postupujeme dále následovně:

1) buď využijeme znalostí o grafu kvadratické funkce $f: y = 3x^2 - 5x + 6$. **Grafem funkce je parabola otevřená „nahoru“**, a protože **diskriminant kvadratické rovnice je záporný**, nelze vypočítat kořeny $x_{1,2}$, které tedy **neexistují** $\Rightarrow$ **graf kvadratické funkce neprotíná osu x** $\Rightarrow$ **leží celý nad osou x** . Nyní jen **stačí zjistit, zda je splněna původní nerovnice**: $3x^2 - 5x + 6 < 0$, tedy $f < 0 \Rightarrow$ tato **splněna není** $\Rightarrow$ **nerovnice nemá žádné řešení** $\Rightarrow K = \emptyset$

2) nebo do původního zadání nerovnice $3x^2 - 5x + 6 < 0$ **dosadíme za x libovolně zvolené $\mathbb{R}$ -číslo a zjistíme, zda je nerovnice splněna**. Např. volíme za $x = 0 \Rightarrow$ po dosazení obdržíme:
 $3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 < 0 \Rightarrow 6 < 0 \Rightarrow$ **nerovnost je nepravdivá** $\Rightarrow$ **nerovnice nemá žádné řešení** $\Rightarrow K = \emptyset$

Příklad 7.

Řešte nerovnici $3x^2 - 5x + 6 > 0$!

Řešení:

Levou stranu nerovnice se pokusíme rozložit na součin kořenových činitelů. Nejprve musíme vypočítat kořeny příslušné kvadratické rovnice (viz předchozí řešení příklad):

$$3x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 25 - 72 = -47 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ kvadratická rovnice nemá řešení v množině $\mathbb{R} \Rightarrow$ rovnici nelze rozložit na součin kořenových činitelů

Postupujeme dále následovně:

1) buď využijeme znalostí o grafu kvadratické funkce $f: y = 3x^2 - 5x + 6$. **Grafem funkce je parabola otevřená „nahoru“**, a protože **diskriminant kvadratické rovnice je záporný**, kořeny $x_{1,2}$ **neexistují** $\Rightarrow$ **graf kvadratické funkce neprotíná osu x** $\Rightarrow$ **leží celý nad osou x** . Dále **stačí zjistit, zda je splněna původní nerovnice**: $3x^2 - 5x + 6 > 0$ tedy $f > 0 \Rightarrow$ tato **splněna je** pro jakékoli reálné $x \Rightarrow$ **nerovnice má nekonečně mnoho řešení** $\Rightarrow K = \mathbb{R}$

2) nebo do původního zadání nerovnice $3x^2 - 5x + 6 > 0$ **dosadíme za x libovolně zvolené $\mathbb{R}$ -číslo a zjistíme, zda je nerovnice splněna**. Např. volíme za $x = 0 \Rightarrow$ po dosazení obdržíme:
 $3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 > 0 \Rightarrow 6 > 0 \Rightarrow$ **nerovnost je pravdivá** $\Rightarrow$ **nerovnice má nekonečně mnoho řešení** $\Rightarrow K = \mathbb{R}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 8.

Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ má výraz smysl (resp. určete definiční obor výrazu) $\sqrt{20x^2 - x - 1}$!

Řešení:

Výraz z odmocninou má smysl, jestliže výraz nacházející se pod odmocninou je nezáporný $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 20x^2 - x - 1 \geq 0$

Nerovnici tedy dále řešíme nám již známými postupy:

$$20x^2 - x - 1 \geq 0$$

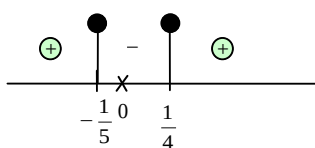
rozložíme na součin kořenových činitelů; nejprve nalezneme kořeny příslušné kvadratické rovnice

$$20x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow D = 81 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = -\frac{1}{5}$$

$$20\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right) \geq 0$$

řešíme metodou nulových bodů

$$\text{nulové body: } \frac{1}{4}; \left(-\frac{1}{5}\right)$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$$

definiční obor výrazu (D)

Příklad 9.

Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $(3 - 2x) \cdot (5 + 2x - 3x^2) < 0$!

Řešení:

Levou stranu nerovnice rozložíme na součin elementárních závorek, které již dále nelze rozložit $\Rightarrow$
 druhou závorku rozložíme na součin kořenových činitelů (užitím Vietových vzorců) $\Rightarrow$ najdeme kořeny příslušné kvadratické rovnice:

$$5 + 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow D = 64 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{5}{3}$$

Nyní začneme řešit původní nerovnici:

$$(3 - 2x) \cdot (5 + 2x - 3x^2) < 0$$

nerovnici zapíšeme ve tvaru součinu kořenových činitelů

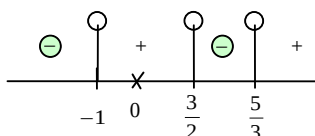
$$-3 \cdot (3 - 2x) \cdot (x + 1) \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) < 0$$

$$(3 - 2x) \cdot (x + 1) \cdot (-3x + 5) < 0$$

nerovnici řešíme dále metodou nulových bodů

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

nulové body: $\frac{3}{2}; -1; \frac{5}{3}$



$$K = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$$

množina kořenů nerovnice

Příklad 10.

Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\frac{2x-1}{x^2-3} \leq 0$!

Řešení:

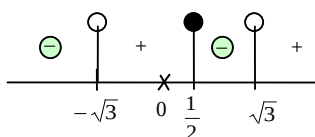
Jmenovatel na levé straně nerovnice rozložíme na součin kořenových činitelů $\Rightarrow$ jmenovatel představuje vzorec $a^2 - b^2$, který lze rozložit na součin $(a-b)(a+b) \Rightarrow$ výraz lze tedy upravit takto:

$$\frac{2x-1}{x^2-3} \leq 0$$

$$\frac{2x-1}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} \leq 0$$

nerovnici řešíme dále metodou nulových bodů

nulové body: $\frac{1}{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}$



$$K = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$$

množina kořenů nerovnice



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 11.

Řešte v R nerovnici $\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} > \frac{1}{4x} - 1$!

Řešení:

Nerovnici s neznámou ve jmenovateli řešíme v množině R nejčastěji tak, že všechny výrazy převedeme ekvivalentními úpravami na jednu stranu nerovnice,, abychom na druhé straně získali nulu! V našem případě převedeme všechny výrazy v nerovnici doleva a vpravo získáme číslo 0.

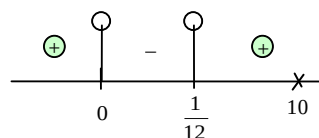
$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} > \frac{1}{4x} - 1$$

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} - \frac{1}{4x} + 1 > 0$$

$$\frac{6 - 4 - 3 + 12x}{12x} > 0$$

$$\frac{12x - 1}{12x} > 0$$

nulové body: $\frac{1}{12}$; 0



$$\underline{\underline{K = (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{12}; \infty)}}$$

následně výraz na levé straně nerovnice převedeme na společný jmenovatel a upravíme čitatele

řešíme metodou nulových bodů

množina kořenů nerovnice

Úlohy k procvičování:

1) Řešte nerovnice:

a) $x^2 + \frac{1}{2}x \leq 0$

b) $x^2 + 2 > 0$

c) $x^2 - 2 > 0$

d) $x^2 < x$

e) $\frac{1}{3}x^2 + 1 > 0$

f) $3x^2 - \frac{1}{3} < 0$

g) $-3x^2 \geq -2$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2) Řešte nerovnice:

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$

b) $-x^2 + 5x + 14 \geq 0$

c) $x^2 + 4x \leq -5$

d) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} \leq 0$

e) $x^2 + \frac{5}{4} \geq x$

f) $x^2 + 3x + 3 \geq 2x + 9$

g) $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} \geq 0$

h) $-2x^2 + 13x - 15 > 0$

i) $2x^2 - 6x + 9 > 0$

j) $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$

3) Řešte nerovnice v oboru přirozených čísel:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

b) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

4) Řešte nerovnice:

a) $(x-2)(x-6) < 4(x-6)$

b) $(1-x) \leq (x-1)(x+2)$

c) $(x+3)^2 \leq 4$

d) $\frac{3}{x^2 + 2x} < 0$

e) $\frac{x^2 - 6x + 8}{25} \geq 0$

f) $\frac{0,5}{x - x^2 - 1} < 0$

g) $\frac{2}{2x^2 + x - 1} \leq 0$

5) Určete definiční obory výrazů:

a) $\sqrt{12x^2 - x - 1}$

b) $\sqrt{12x - 9 - 4x^2}$

6) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ má výraz smysl:

a) $\sqrt{-x^2 + 3x - 3}$

b) $\sqrt{\frac{-2}{x^2 - 5x + 6}}$

7) Určete definiční obor funkce:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- a) $y = \frac{2x+5}{\sqrt{6x^2-7x+2}}$
 b) $y = \sqrt{5x-3x^2-2}$
 c) $y = \sqrt{-4x^2+4x+3}$
 d) $y = \sqrt{6x-x^2} + \sqrt{x-1}$

8) Řešte v R nerovnice:

- a) $\frac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4} \geq 0$
 b) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+21} < 0$
 c) $\frac{3x^2-7x+2}{x-1} > 0$
 d) $\frac{2x^2-3x-9}{x-2} > 0$
 e) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x} \leq 0$
 f) $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \leq \frac{4}{3}$
 g) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x}$

Výsledky:

- 1) a) $\left\langle -\frac{1}{2}; 0 \right\rangle$ b) R c) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$
 d) $(0; 1)$ e) R f) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ g) $\emptyset$
 2) a) $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ b) $\langle -2; 7 \rangle$ c) $\emptyset$
 d) $-\frac{3}{4}$ e) R f) $(-\infty; -3) \cup \langle 2; \infty)$
 g) $\frac{3}{2}$ h) $\left(\frac{3}{2}; 5\right)$ i) R
 j) $(-\infty; \frac{2}{3}) \cup \langle 1; \infty)$
 3) a) $1; 2; 3$ b) N
 4) a) $\emptyset$ b) $(-\infty; -3) \cup \langle 1; \infty)$ c) $\langle -5; -1 \rangle$ d) $(-2; 0)$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- e) $(-\infty; 2) \cup (4; \infty)$ f) R g) $(-1; \frac{1}{2})$
- 5) a) $(-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{3}; \infty)$ b) $\frac{3}{2}$
- 6) a) $\emptyset$ b) $(2; 3)$
- 7) a) $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$ b) $(\frac{2}{3}; 1)$ c) $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ d) $(1; 6)$
- 8) a) $(-\infty; 1) \cup (3; 4) \cup (5; \infty)$ b) $(2; 3) \cup (5; 7)$
- c) $(\frac{1}{3}; 1) \cup (2; \infty)$ d) $(-\frac{3}{2}; 2) \cup (3; \infty)$
- e) $(0; 1) \cup (2; 4)$ f) $(-\infty; -2) \cup (0; 6)$
- g) $(-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; \infty)$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

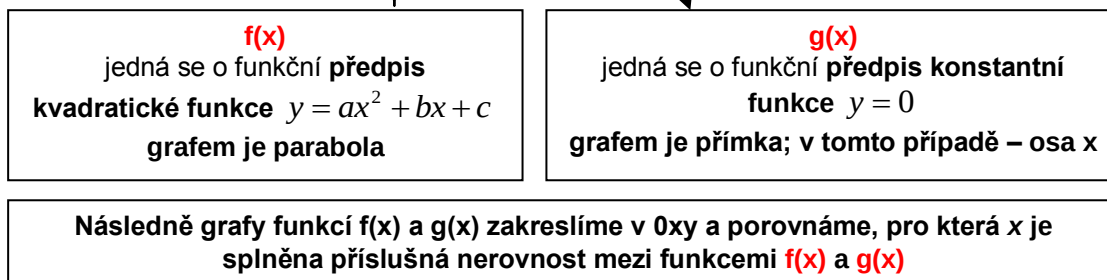
KVADRATICKÉ NEROVNICE (graficky)

Teorie:

Grafické řešení kvadratické nerovnice spočívá na obdobném principu jako tomu je u grafického řešení kvadratické rovnice. Lze opět použít dvou možných způsobů řešení:

- 1) **Kvadratickou nerovnici upravíme ekvivalentními úpravami na jeden ze základních tvarů kvadratické nerovnice. Levou stranu v zápisu nerovnice pak považujeme za funkční předpis jedné (kvadratické) funkce a pravou stranu za předpis druhé (konstantní) funkce – viz níže. Grafy těchto funkcí zakreslíme do téhož souřadnicového systému 0xy a nalezneme jejich průsečíky** (tj. průsečíky paraboly s osou x , což jsou krajní body případných možných intervalů řešení). Pak podle znaménka nerovnosti určíme, pro která x je splněna příslušná nerovnost, výsledek vyznačíme na x -ové ose a zapíšeme intervalem příp. intervaly.

$$ax^2 + bx + c (\geq \leq > <) 0$$



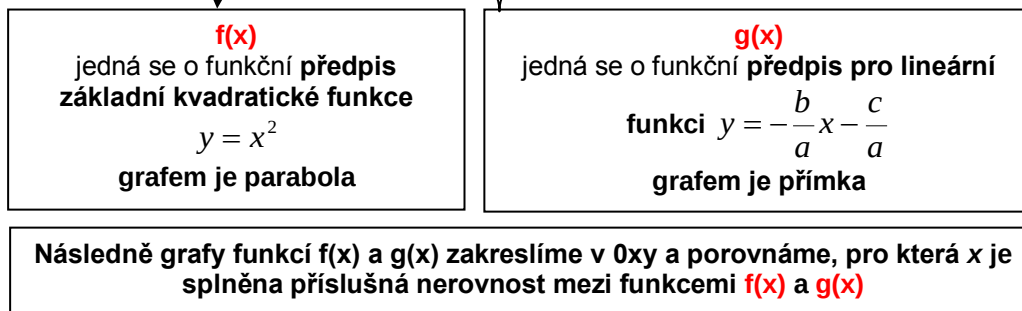
- 2) Kvadratickou nerovnici upravíme ekvivalentními úpravami na níže uvedený tvar. Levou stranu v zápisu nerovnice považujeme za funkční předpis jedné (základní kvadratické) funkce a pravou stranu nerovnice považujeme za předpis druhé (lineární) funkce – viz níže. Grafy těchto funkcí zakreslíme do téhož souřadnicového systému 0xy a nalezneme jejich průsečíky (tj. průsečíky paraboly s přímkou). x -ové souřadnice průsečíků grafů určují krajní meze případných intervalů, které jsou řešením příslušné nerovnice. Podle znaménka nerovnosti zjistíme, pro která x je splněna daná nerovnost, výsledek vyznačíme na x -ové ose a zapíšeme intervalem příp. intervaly.

$$ax^2 + bx + c (\geq \leq > <) 0$$

$$ax^2 (\geq \leq > <) -bx - c \quad / \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \quad \textbf{POZOR NA PŘÍPADNOU ZMĚNU}$$

ZNAMÉNKA NEROVNOSTI !!!

$$x^2 (\geq \leq > <) -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešené úlohy:

Příklad 1.

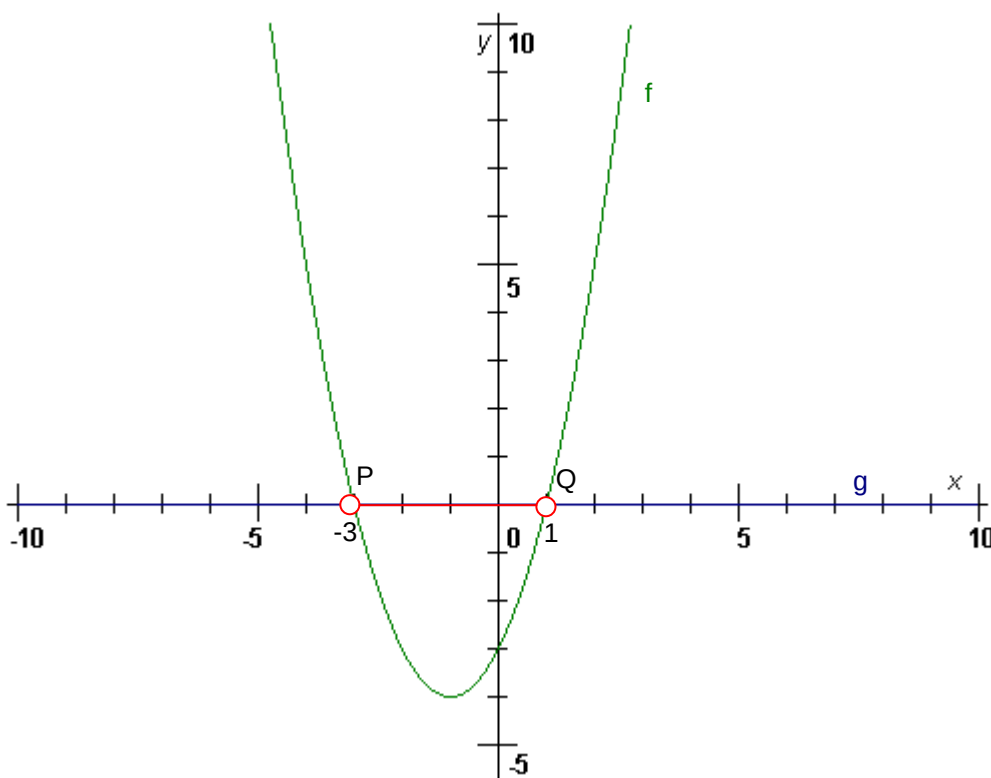
Řešte graficky kvadratickou nerovnici:

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

Řešení:

1. způsob řešení:

- 1) Levou stranu nerovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, kterou sestojíme podle známých pravidel (viz předcházející kapitola – kvadratické funkce).
- 2) Pravou stranu nerovnice považujeme za předpis konstantní funkce $g(x)$: $y = 0 \Rightarrow$ grafem je přímka (osa x).
- 3) Sestojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



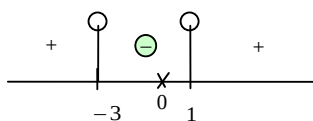
- 4) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce g (průsečíky paraboly funkce f s osou x) $\Rightarrow$ x -ové souřadnice těchto průsečíků určují krajní body intervalu, který je řešením dané kvadratické nerovnice.
- 5) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice:

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$(x - 1) \cdot (x + 3) < 0$$

kvadratický trojčlen rozložíme na součin kořenových činitelů
řešíme metodou nulových bodů

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



$$\underline{K = (-3; 1)}$$

množina všech řešení nerovnice

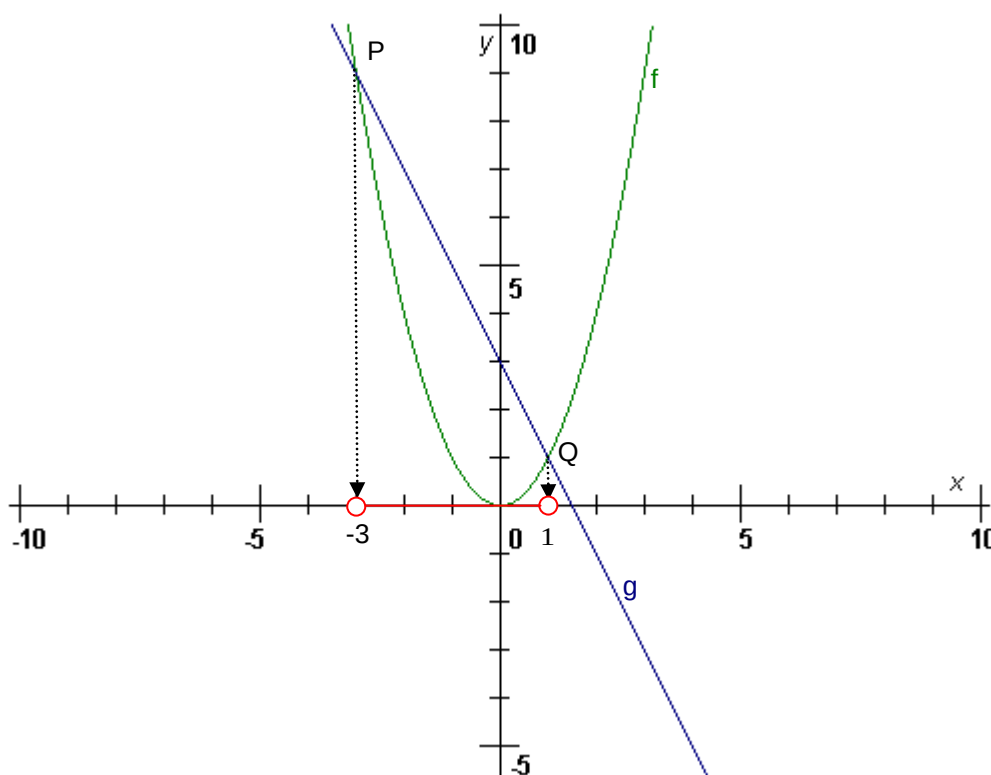
2. způsob řešení:

1) Původní kvadratickou nerovnici upravíme na ekvivalentní tvar: $x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 < -2x + 3$
Takto upravenou nerovnici řešíme obdobně jako u 1. způsobu řešení.

2) Levou stranu nerovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 \Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, která má vrchol v počátku souřadnicového systému a „je otevřena směrem nahoru“. Další vlastnosti této funkce jsou nám známy z předcházející kapitoly – kvadratické funkce.

3) Pravou stranu nerovnice považujeme za předpis lineární funkce $g(x)$: $y = -2x + 3 \Rightarrow$ grafem je klesající přímka procházející např. body $[0; 3]$ a $[1; 1]$

4) Sestrojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



5) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce $g \Rightarrow x$ -ové souřadnice těchto průsečíků určují krajní meze intervalu, který je řešením dané kvadratické nerovnice.

6) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice (viz výše).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.

Řešte graficky kvadratickou nerovnici:

$$9x^2 + 12x + 4 \leq 0$$

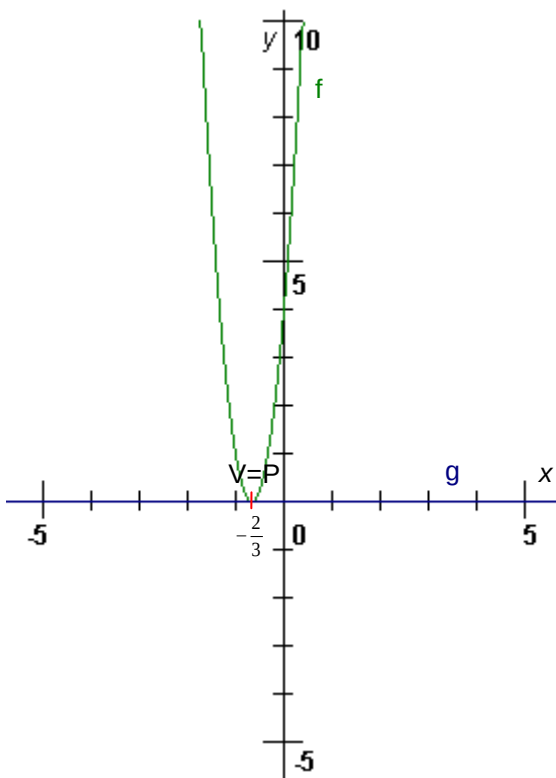
Řešení:

1. způsob řešení:

1) Levou stranu nerovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, kterou sestojíme podle známých pravidel (viz předcházející kapitola – kvadratické funkce).

2) Pravou stranu nerovnice považujeme za předpis konstantní funkce $g(x)$: $y = 0 \Rightarrow$ grafem je přímka (osa x).

3) Sestojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



4) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce g (průsečíky paraboly funkce f s osou x) $\Rightarrow$ x -ová souřadnice tohoto průsečíku určuje řešení dané kvadratické nerovnice.

5) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$9x^2 + 12x + 4 \leq 0$$

kvadratický trojčlen rozložíme na součin kořenových činitelů;
nejprve určíme kořeny příslušné kvadratické rovnice

$$9x^2 + 12x + 4 = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{3}$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 \leq 0$$

číslo umocněné na druhou dává vždy číslo kladné nebo rovno 0;

proto v našem případě lze uvažovat pouze o možnosti, kdy je tento dvojčlen roven 0, tedy platí ...

$$x_{1,2} = -\frac{2}{3}$$

$$K = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

množina všech řešení nerovnice

2. způsob řešení:

1) Původní kvadratickou nerovnici upravíme na ekvivalentní tvar: $9x^2 + 12x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow$

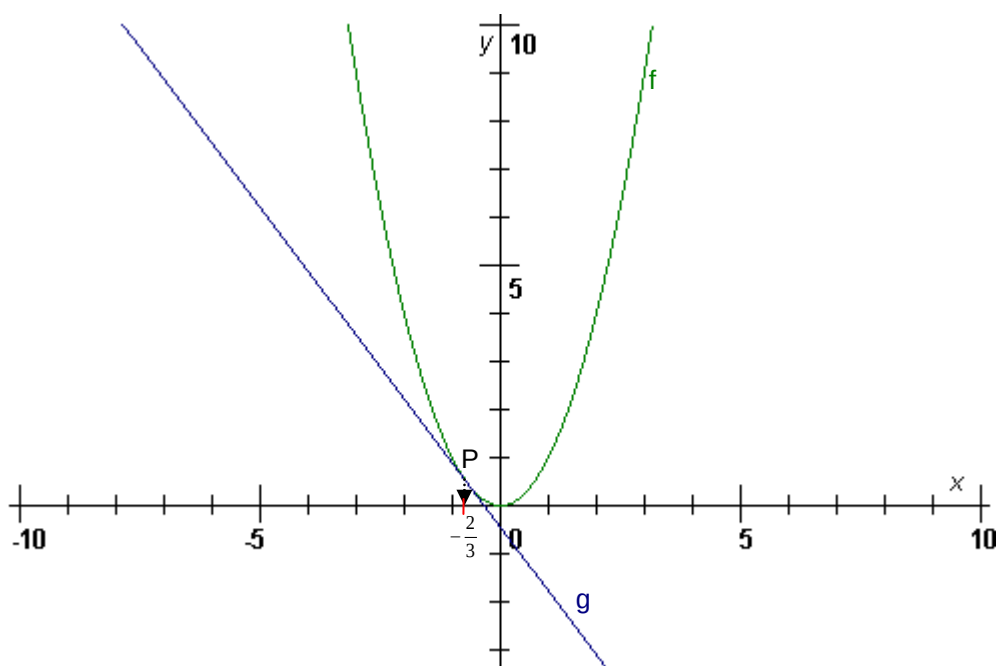
$$x^2 \leq -\frac{12}{9}x - \frac{4}{9} \Leftrightarrow x^2 \leq -\frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$$

2) Levou stranu nerovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 \Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, která má vrchol v počátku souřadnicového systému a „je otevřena směrem nahoru“. Další vlastnosti této funkce jsou nám známy z předcházející kapitoly – kvadratické funkce.

3) Pravou stranu nerovnice považujeme za předpis lineární funkce $g(x)$: $y = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{9} \Rightarrow$ grafem je

klesající přímka procházející např. body $\left[0; -\frac{4}{9}\right]$ a $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$

4) Sestrojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce $g \Rightarrow$ x -ová souřadnice tohoto průsečíku určuje řešení dané kvadratické nerovnice.

6) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice (viz výše).

Příklad 3.

Řešte graficky kvadratickou nerovnici:

$$3x^2 - 5x + 7 > 0$$

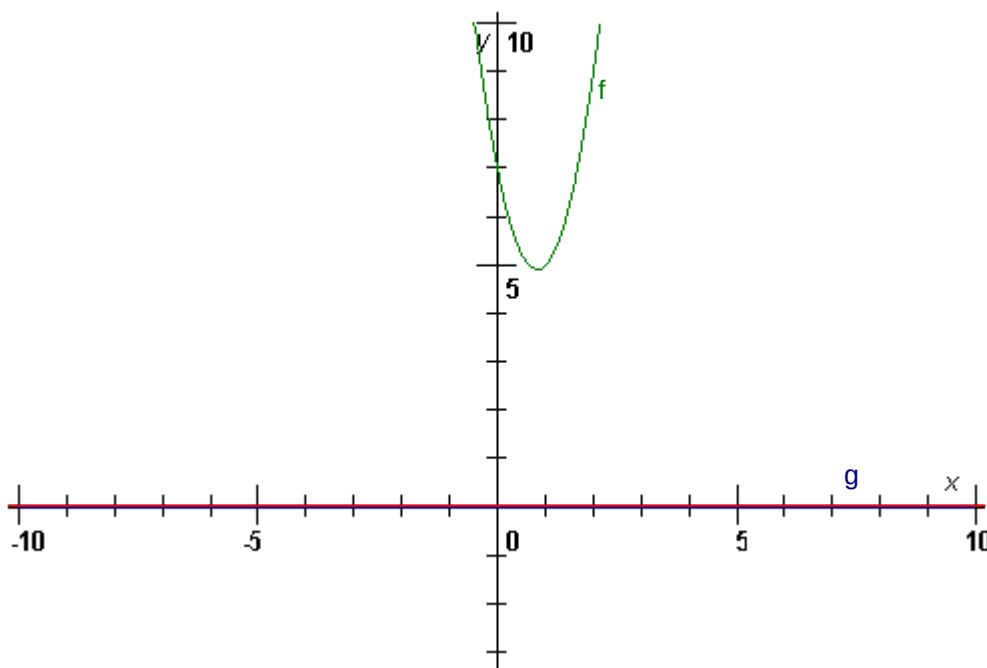
Řešení:

1. způsob řešení:

1) Levou stranu nerovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = 3x^2 - 5x + 7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, kterou sestojíme podle známých pravidel (viz předcházející kapitola – kvadratické funkce).

2) Pravou stranu nerovnice považujeme za předpis konstantní funkce $g(x)$: $y = 0 \Rightarrow$ grafem je přímka (osa x).

3) Sestojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .



4) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce g (průsečíky paraboly funkce f s osou x) $\Rightarrow$
v našem případě průsečíky neexistují $\Rightarrow 3x^2 - 5x + 7 > 0 \Rightarrow f(x) > g(x) \Rightarrow$ nerovnost je
splněna pro všechna reálná čísla $x \Rightarrow$ množina $\mathbb{R}$ je řešením dané kvadratické nerovnice.

5) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$3x^2 - 5x + 7 > 0$$

kvadratický trojčlen rozložíme na součin kořenových činitelů;
nejprve určíme kořeny příslušné kvadratické rovnice

$3x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow D = -59 < 0 \Rightarrow$ průsečíky grafu
paraboly s osou x neexistují $\Rightarrow$ parabola je „otevřena nahoru“
($a > 0$) a celá leží nad osou $x \Rightarrow$ proto volíme libovolné R -
číslo, které dosadíme do nerovnice a zjistíme, zda je tato
nerovnost splněna: tedy volíme $x = 0 \Rightarrow$ dosadíme do předpisu
nerovnosti $\Rightarrow 7 > 0 \Rightarrow$ nerovnost je splněna $\Rightarrow x \in R$

$$\underline{K = R}$$

množina všech řešení nerovnice

2. způsob řešení:

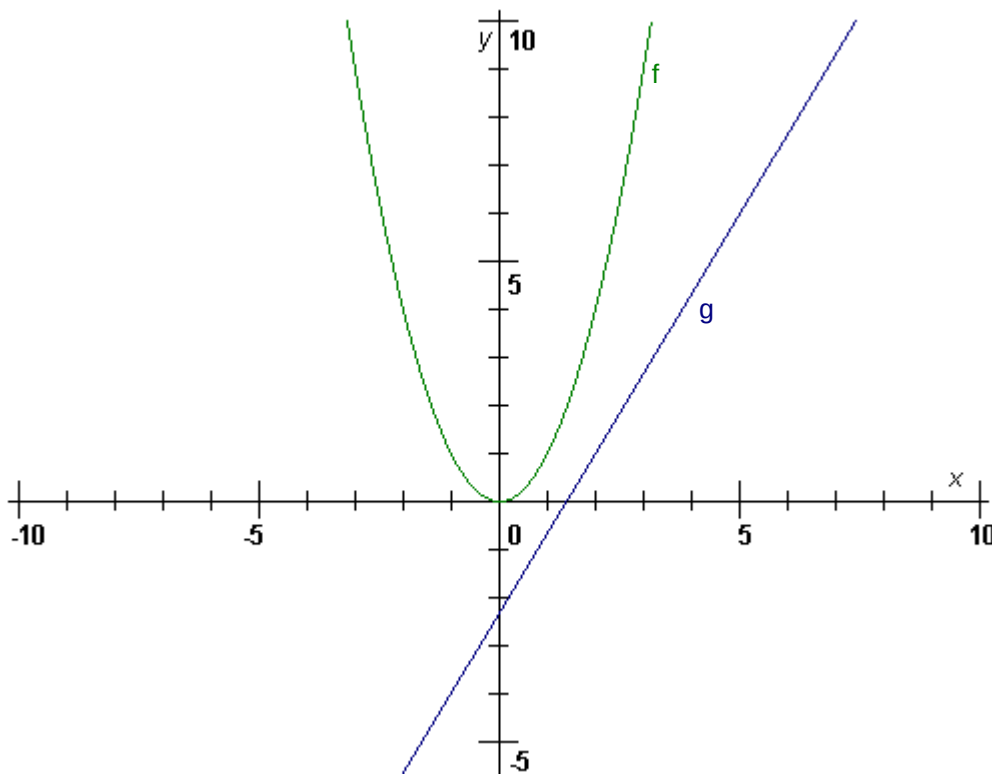
1) Původní kvadratickou nerovnici upravíme na ekvivalentní tvar: $3x^2 - 5x + 7 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$

2) Levou stranu nerovnice považujeme za předpis kvadratické funkce $f(x)$: $y = x^2 \Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, která má vrchol v počátku souřadnicového systému a „je otevřena směrem nahoru“. Další vlastnosti této funkce jsou nám známy z předcházející kapitoly – kvadratické funkce.

3) Pravou stranu nerovnice považujeme za předpis lineární funkce $g(x)$: $y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3} \Rightarrow$ grafem je

rostoucí přímka procházející např. body $\left[0; -\frac{7}{3}\right]$ a $[-1; -4]$

4) Sestrojíme grafy obou funkcí (f a g) do téhož souřadnicového systému Oxy .





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5) Nalezneme průsečíky grafu funkce f s grafem funkce $g \Rightarrow$ průsečíky neexistují; celá parabola je „otevřena nahoru“ ($a > 0$) a celá leží nad grafem funkce $g \Rightarrow$ pro libovolné R -číslo je splněna nerovnost $f(x) > g(x) \Rightarrow x \in R$ je řešením dané kvadratické nerovnice.

6) Kontrolu můžeme provést provedením početního řešení příslušné kvadratické rovnice (viz výše).

Úlohy k procvičování:

Řešte graficky nerovnice !

1) $x^2 < -x - 1$

2) $2x^2 - 5x \geq 0$

3) $x^2 + 4x + 3 \leq 0$

4) $x^2 + 3x + 5 < 0$

5) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x > 0$