

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KVADRATICKÁ FUNKCE (vlastnosti, grafy)

Teorie:

Kvadratickou funkcí se nazývá každá funkce daná předpisem:

$$f: y = ax^2 + bx + c \quad ; a \in \mathbb{R} - \{0\}, b, c \in \mathbb{R}; x \in D(f)$$

$x \dots$ je **proměnná z příslušného definičního oboru funkce** (nejčastěji množina $\mathbb{R}$)

$a, b, c \dots$ jsou **koeficienty kvadratické funkce**, přičemž

$a \dots$ kvadratický koeficient
 $b \dots$ lineární koeficient
 $c \dots$ absolutní koeficient.....kvadratické funkce

Jednotlivým členům v zápisu kvadratické funkce také říkáme:

$ax^2 \dots$ kvadratický člen
 $bx \dots$ lineární člen
 $c \dots$ absolutní člen resp. koeficient.....kvadratické funkce

Graf kvadratické funkce:

A) Sestrojme graf základní kvadratické funkce, tj. funkce, pro kterou platí: $a \neq 0, b = 0, c = 0 \Rightarrow$

$$f: y = ax^2$$

Vytvořme tabulku funkčních hodnot jednotlivých bodů, ležících na grafu kvadratické funkce splňující výše uvedený funkční předpis. Volme vhodné a :

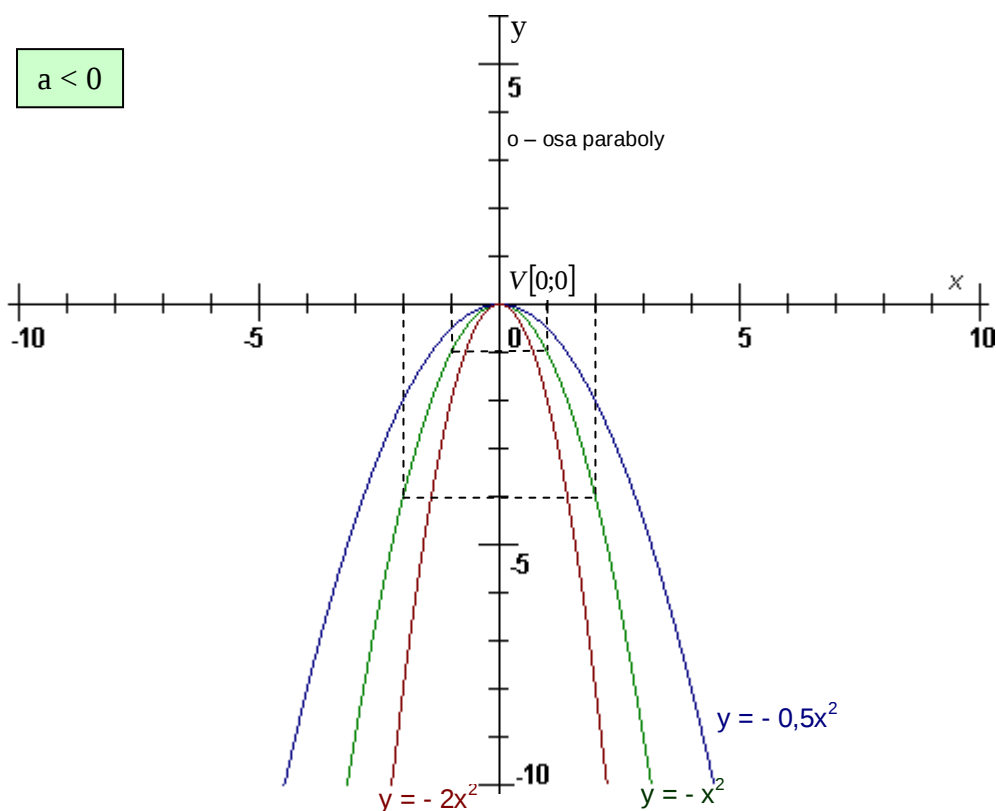
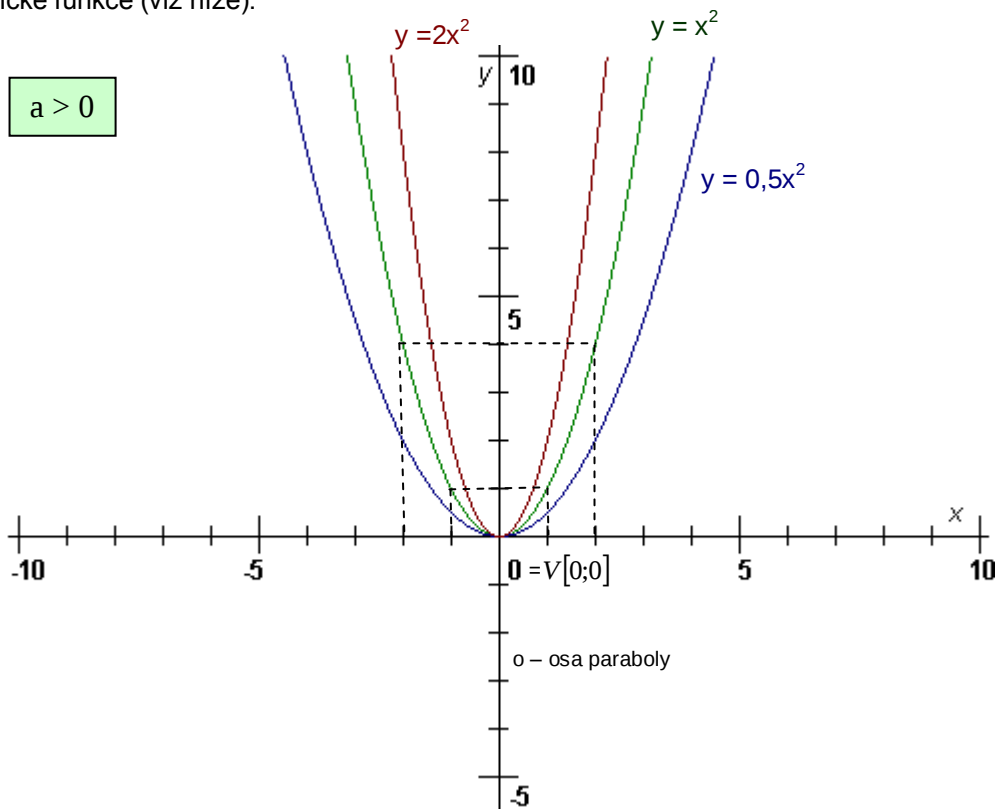
a	$f(x)$	x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$a = 1$	$y = x^2$		9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$a = \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}x^2$		$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$
$a = 2$	$y = 2x^2$		18	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	18
$a = -1$	$y = -x^2$		-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9
$a = -\frac{1}{2}$	$y = -\frac{1}{2}x^2$		$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$
$a = -2$	$y = -2x^2$		-18	-8	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8	-18

$a > 0$

$a < 0$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vypočtené souřadnice jednotlivých bodů zvolených funkcí vyznačme v souřadnicovém systému Oxy (sestrojme obrazy těchto bodů v Oxy) a spojme je křivkou $\Rightarrow$ získaná křivka je pak grafem příslušné kvadratické funkce (viz níže).





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vlastnosti funkce $f : y = ax^2$

- grafem kvadratické funkce je křivka zvaná **PARABOLA**
- graf každé kvadratické funkce $f : y = ax^2$ je souměrný podle osy y kartézské soustavy souřadnic Oxy
- graf každé kvadratické funkce $f : y = ax^2$ prochází bodem $V[0;0]$ – tento bod je tzv. **VRCHOL PARABOLY**

$$a > 0$$

- 1) $y \geq 0 \Rightarrow$ graf funkce f leží nad osou x (parabola je otevřena směrem “nahoru”)
- 2) funkce f je **sudá funkce** – její graf je souměrný podle osy y , protože platí $f(-x) = f(x)$ tj. hodnota funkce v bodě $(-x)$ je stejná jako hodnota funkce v bodě x
- 3) pro $x \in (-\infty; 0)$ je funkce **klesající**
pro $x \in (0; \infty)$ je funkce **rostoucí**
- 4) pro $x = 0$ má funkce **minimum** tj. $V[0;0]$... **vrchol paraboly**
- 5) $D(f) = R, H(f) = R_0^+$

$$a < 0$$

- 1) $y \leq 0 \Rightarrow$ graf funkce f leží pod osou x (parabola je otevřena směrem „dolů”)
- 2) funkce f je **sudá funkce** – její graf je souměrný podle osy y , protože platí $f(-x) = f(x)$ tj. hodnota funkce v bodě $(-x)$ je stejná jako hodnota funkce v bodě x
- 3) pro $x \in (-\infty; 0)$ je funkce **rostoucí**
pro $x \in (0; \infty)$ je funkce **klesající**
- 4) pro $x = 0$ má funkce **maximum** tj. $V[0;0]$... **vrchol paraboly**
- 5) $D(f) = R, H(f) = R_0^-$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

B) Sestrojme grafy dalších kvadratických funkcí, přičemž

graf každé kvadratické funkce $f : y = ax^2 + bx + c \quad ; a \in \mathbb{R} - \{0\}, b, c \in \mathbb{R}; x \in D(f)$ lze získat

posunutím grafu základní kvadratické funkce $g : y = ax^2$

Řešené úlohy:

Příklad 1.

Sestrojte graf kvadratické funkce $f : y = x^2 - 3$ posunutím grafu funkce $g : y = x^2$ a запиšte vlastnosti funkce f !

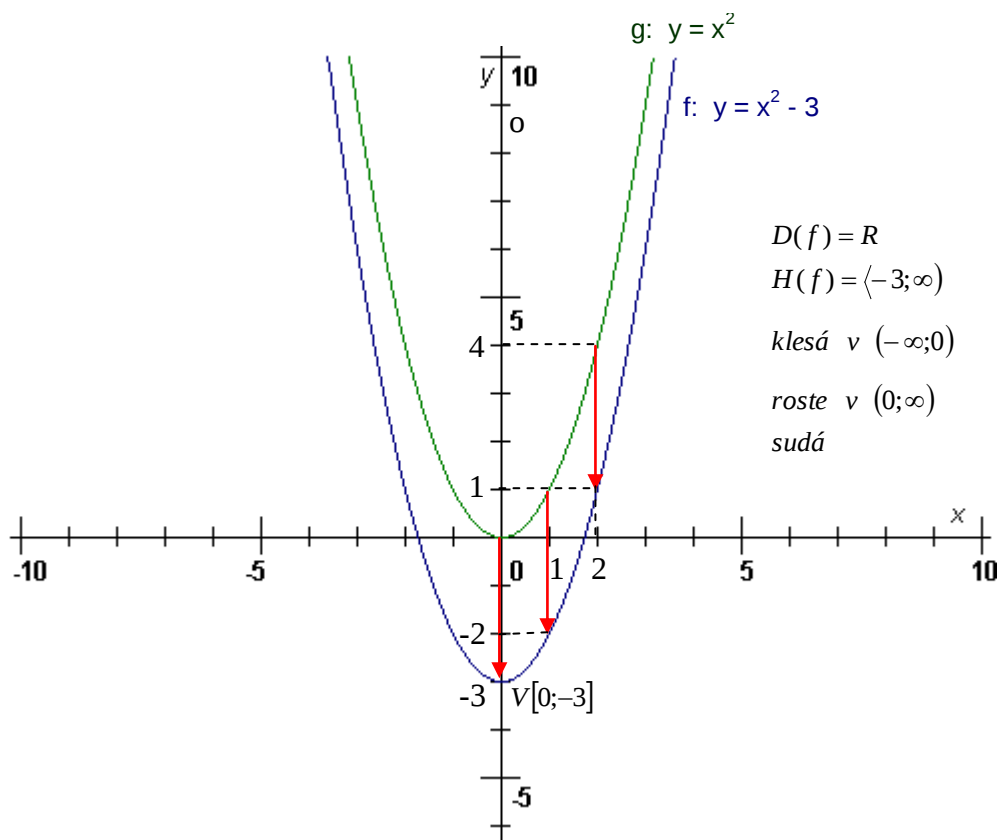
Řešení:

Kvadratický koeficient v předpisu funkce $a > 0 \Rightarrow$ parabola je otevřena směrem „nahoru“.

Sestrojíme graf funkce $g : y = x^2$ a **posuneme jej o 3 jednotky v záporném směru osy y** (tj. o 3

jednotky dolů), čímž získáme graf původní funkce $f : y = x^2 - 3$

Všimněme si, že vrchol paraboly funkce f má souřadnice $V[0; -3]$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 2.

Sestrojte graf kvadratické funkce $f: y = x^2 + 2x + 1$ pomocí grafu funkce $g: y = x^2$ a запиšte vlastnosti funkce f !

Řešení:

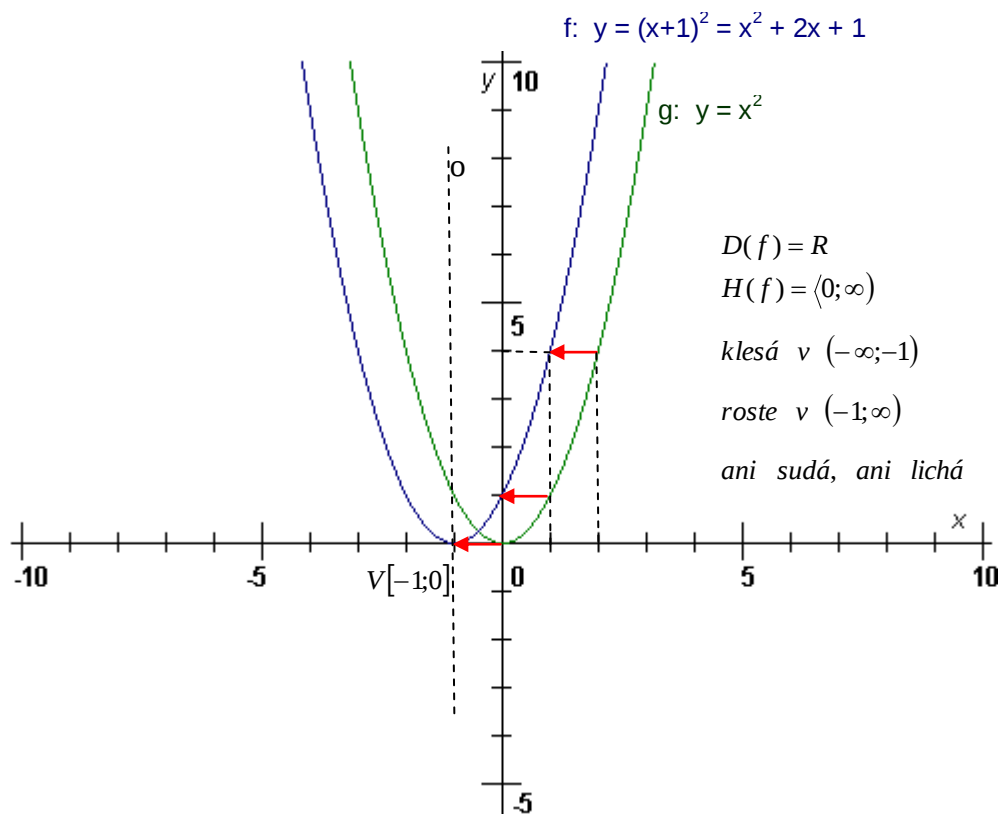
Kvadratický koeficient v předpisu funkce $a > 0 \Rightarrow$ parabola je otevřena směrem „nahoru“.

Funkční předpis funkce $f: y = x^2 + 2x + 1$ upravíme následujícím způsobem: pravou stranou v zápisu funkce f tvoří kvadratický trojčlen vytvářející vzorec $\Rightarrow f: y = (x+1)^2$

V takovém případě při sestavení grafu funkce f postupujeme takto:

- 1) Sestrojíme graf funkce $g: y = x^2$
- 2) Graf funkce $g: y = x^2$ **posuneme o 1 jednotku v záporném směru osy x** (tj. o 1 jednotku doleva), čímž získáme graf původní funkce $f: y = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Protože platí, že $f: y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 + 0$, všimněme si, že vrchol paraboly funkce f má souřadnice $V[-1;0]$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3.

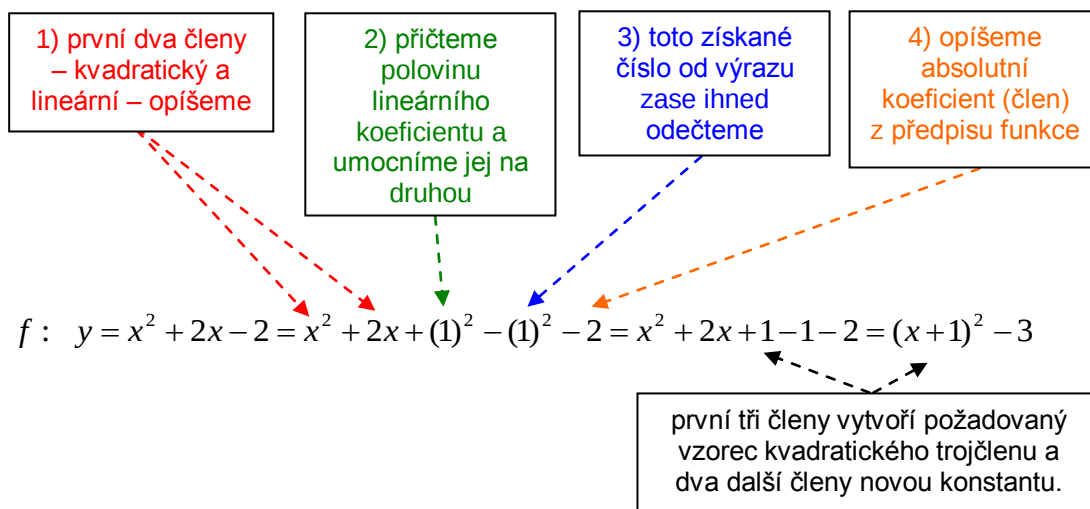
Sestrojte graf kvadratické funkce $f: y = x^2 + 2x - 2$ a zapište její vlastnosti !

Řešení:

Kvadratický koeficient v předpisu funkce $a > 0 \Rightarrow$ parabola je otevřena směrem „nahoru“.

Funkční předpis funkce $f: y = x^2 + 2x - 2$ upravíme následujícím způsobem.

- 1) Na pravou stranu funkčního předpisu se snažíme dostat vzorec, což provedeme takto:



- 2) Sestrojíme graf funkce $g: y = x^2$

- 3) Sestrojíme graf funkce $h: y = (x + 1)^2$ posunutím grafu funkce $g: y = x^2$ o 1 jednotku doleva, tedy v záporném směru osy x

- 4) Sestrojíme graf funkce $f: y = x^2 + 2x - 2 = (x + 1)^2 - 3$ posunutím grafu funkce

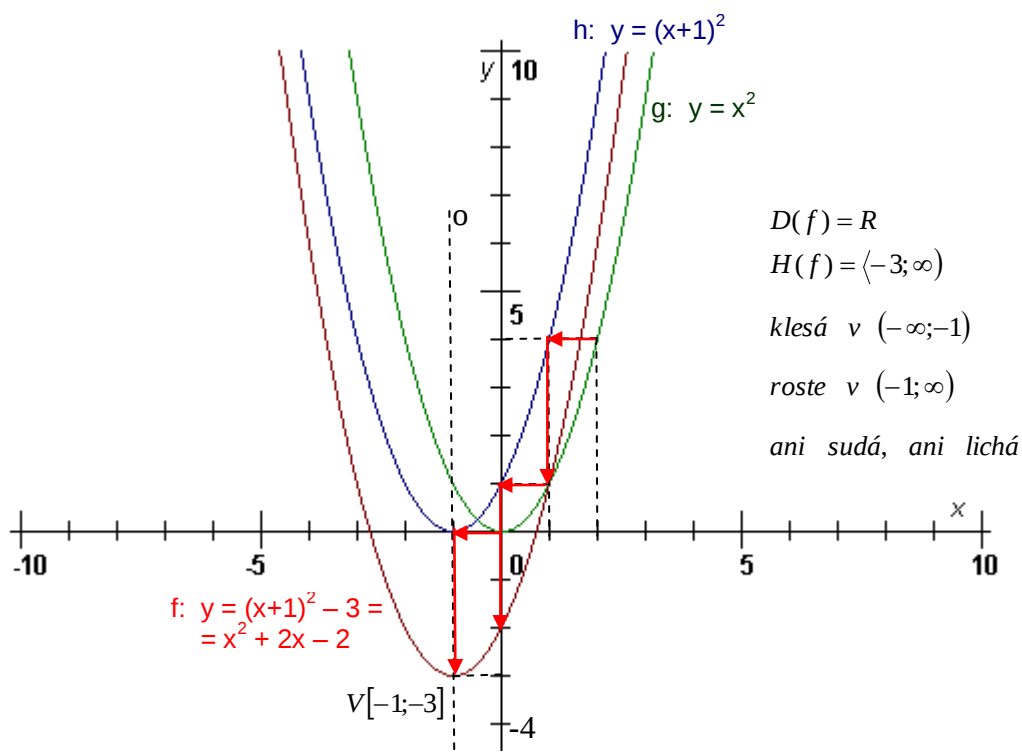
$$h: y = (x + 1)^2 \text{ o 3 jednotky dolů, tedy v záporném směru osy } y, \text{ čímž získáme graf}$$

$$\text{původní funkce } f: y = x^2 + 2x - 2$$

Protože platí, že $f: y = x^2 + 2x - 2 = (x + 1)^2 - 3$, všimněme si, že vrchol paraboly funkce f má

souřadnice $V[-1; -3]$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Teorie:

Graf každé kvadratické funkce je souměrný podle přímky, která je rovnoběžná s osou y kartézské soustavy souřadnic $0xy$ a prochází bodem $V[x_v; y_v]$ nazývaným **vrcholem paraboly**.

Určení vrcholu paraboly (obecně):

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{vzorec}} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$= 0$ $x_v + \frac{b}{2a} = 0$ $x_v = -\frac{b}{2a}$	Je-li předchozí výraz $x_v + \frac{b}{2a} = 0$ $\Rightarrow$ $y_v = c - \frac{b^2}{4a}$
--	--

Pak pro souřadnice vrcholu paraboly platí $V[x_v; y_v] = \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$

Řešené úlohy:

Příklad 4.

Sestrojte graf kvadratické funkce $f: y = x^2 + 2x - 3$ a zapište její vlastnosti!

Řešení:

1) Najdeme vrchol paraboly:

1. způsob nalezení vrcholu paraboly:

Užitím vzorce pro **výpočet souřadnic vrcholu**: $a = 1; b = 2; c = -3$

$$V[x_v; y_v] = \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right] = \left[-\frac{2}{2 \cdot 1}; -3 - \frac{4}{4 \cdot 1}\right] = [-1; -4]$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2. způsob nalezení vrcholu paraboly:

Úpravou funkčního předpisu:

$$f: y = x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x+1)^2 - 4 \Rightarrow V[x_v; y_v] = [-1; -4]$$

2) Kvadratický koeficient $a > 0 \Rightarrow$ parabola je otevřena směrem „nahoru“.

3) Nalezneme několik bodů, ležících na grafu dané kvadratické funkce, užitím tabulky funkčních hodnot!

x-ové souřadnice bodů volíme

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	-3	-4	-3	0	5

y-ové souřadnice bodů dopočítáváme podle daného funkčního předpisu

Resp. nalezneme průsečíky grafu funkce f s osou x a osou y :

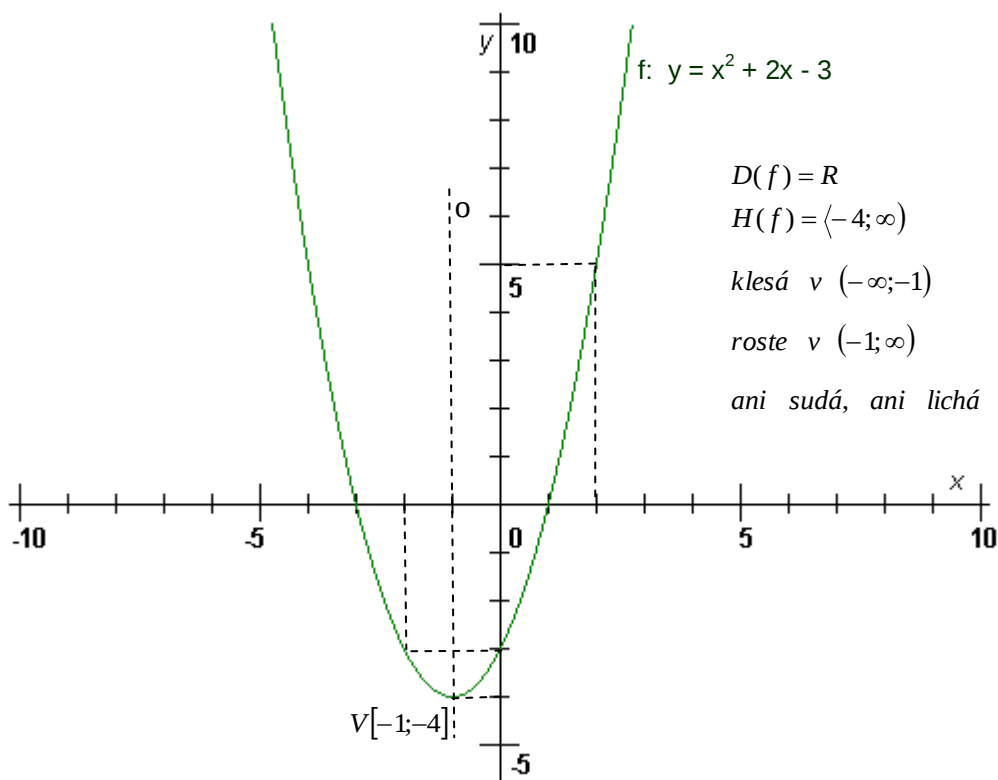
$$f \cap \text{osax} = [x; 0]: x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$f \cap \text{osay} = [0; y]: y(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

4) Sestrojíme obrazy těchto nalezených bodů v souřadnicovém systému Oxy a body spojíme.

(Pamatujeme, že **parabola je souměrná podle přímky, procházející vrcholem paraboly a rovnoběžné**

s osou y)! Rovněž můžeme využít znalostí o posunutí grafu funkce $g: y = x^2$ nejprve o 1 jednotku v záporném směru osy x (doleva) a následně o 4 jednotky v záporném směru osy y (dolů)!



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 5.

Sestrojte graf kvadratické funkce $f: y = -x^2 - 6x - 8$ a zapište její vlastnosti !

Řešení:

1) Najdeme vrchol paraboly:

1. způsob nalezení vrcholu paraboly:

Užitím vzorce pro **výpočet souřadnic vrcholu**: $a = -1; b = -6; c = -8$

$$V[x_v; y_v] = \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right] = \left[-\frac{-6}{2 \cdot (-1)}; -8 - \frac{36}{4 \cdot (-1)} \right] = [-3; 1]$$

2. způsob nalezení vrcholu paraboly:

Úpravou funkčního předpisu:

$$f: y = -x^2 - 6x - 8 = -(x^2 + 6x + 9) + 9 - 8 = -(x + 3)^2 + 1 \Rightarrow V[x_v; y_v] = [-3; 1]$$

1) konstantu před kvadratickým koeficientem (jinou než 1) vždy vytýkáme před závorku

2) do závorky opíšeme kvadratický a lineární člen, avšak dáváme **POZOR** na použití správných znamének v závorce

3) závorku doplníme na kvadratický trojčlen podle již dříve zmíněných pravidel – vzniká vzorec pro výpočet dvojčlenu

4) v tomto případě **odečtenou** novou konstantu následně **opět přičteme** a opíšeme absolutní člen funkce

5) funkci upravíme do již známého tvaru, z něhož **určíme souřadnice vrcholu paraboly**

2) Kvadratický koeficient $a < 0 \Rightarrow$ parabola je otevřena směrem „dolů“.

3) Nalezneme několik bodů, ležících na grafu dané kvadratické funkce, užitím tabulky funkčních hodnot!

x-ové souřadnice bodů volíme

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	-3	0	1	0	-3	-8

y-ové souřadnice bodů dopočítáváme podle daného funkčního předpisu

Resp. nalezneme průsečíky grafu funkce f s osou x a osou y :

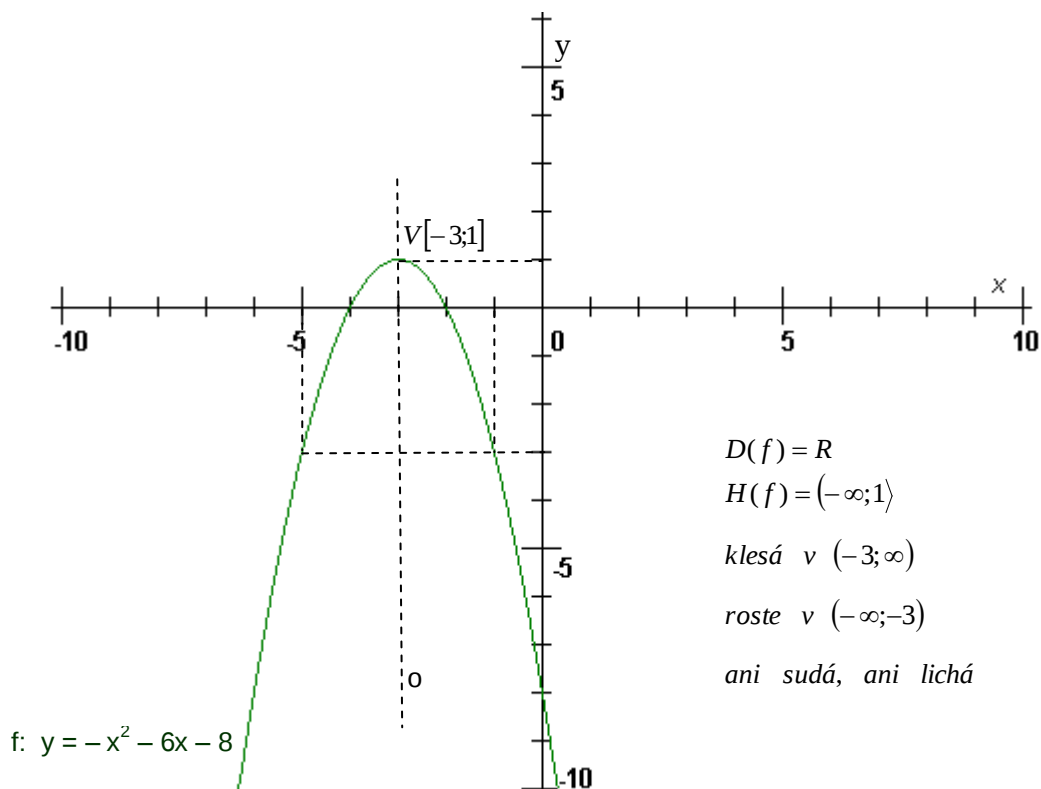
$$f \cap osax = [x; 0]: -x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow -(x^2 + 6x + 8) = 0 \Rightarrow -(x + 4) \cdot (x + 2) = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = -2$$

$$f \cap osay = [0; y]: y(0) = -0^2 - 6 \cdot 0 - 8 = -8$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4) Sestrojíme obrazy nalezených bodů v souřadnicovém systému Oxy a body spojíme. (Pamatujeme, že parabola je souměrná podle přímky, procházející vrcholem paraboly a rovnoběžné s osou y)!

Rovněž můžeme využít znalostí o posunutí grafu funkce $y = -x^2$ nejprve o 3 jednotky v záporném směru osy x (doleva) a následně o 1 jednotku v kladném směru osy y (nahoru)!





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úlohy k procvičování:

Sestrojte grafy kvadratických funkcí a zapište jejich vlastnosti !

1) $f: y = -2x^2 + 1$

2) $f: y = x^2 - 3x$

3) $f: y = -x^2 + 2$

4) $f: y = x^2 + 6x + 10$

5) $f: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$

6) $f: y = 2x^2 + 5x - 1$

7) $f: y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 3$

8) $f: y = 2x^2 - 8x + 6$

9) *** $f: y = x|x|$

10) *** $f: y = x^2 - 2x - 2$ a $g: y = |x^2 - 2x - 2|$ v téže soustavě souřadnic

11) *** $f: y = -x^2 + 4x + 1$ a $g: y = |-x^2 + 4x + 1|$ v téže soustavě souřadnic