

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	DRUHÝ	Mgr. Tomáš MAŇÁK	11. červenec 2012
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
LINEÁRNÍ ROVNICE S PARAMETREM			

LINEÁRNÍ ROVNICE S PARAMETREM

Rovnice s parametrem obsahuje kromě neznámých další proměnné, kterým se říká parametry. Je to zápis množin všech rovnic, které bychom získali dosazením všech hodnot, jichž mohou parametry nabývat.

Řešení rovnice s parametry spočívá v určení jejich kořenů v závislosti na přípustných hodnotách parametru.

Při řešení **lineární rovnice s parametrem** rovnici postupně upravujeme v závislosti na hodnotách parametru. Výsledek shrneme do tabulky.

Řešený příklad 1

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}$ s neznámou x a parametrem $a \in \mathbb{R}$.

Řešení:

- 1) Musíme uvést **podmínky pro neznámou** $x \Rightarrow x \neq 1$
- 2) Musíme uvést **podmínky pro parametr** $a \Rightarrow a \neq 0$
(tj. rovnici s neznámou x získáme jen pro $a \neq 0$)
- 3) **Rovnici následně řešíme** známými **ekvivalentními a důsledkovými úpravami**:

$$\frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1} \quad | \cdot a(x-1)$$

odstraníme zlomky z rovnice

$$(2-a)(x-1) = 2a$$

vynásobíme závorky

$$2x - ax - 2 + a = 2a$$

výrazy s neznámou x převedeme na jednu stranu rovnice; všechny ostatní výrazy převedeme na opačnou stranu rovnice

$$2x - ax = 2a - a + 2$$

neznámou x osamostatníme vytknutím před závorku

$$x(2-a) = a+2 \quad (1)$$

Položme si otázku: **Lze dělit výrazem** $(2-a)$?

$$a = 2$$

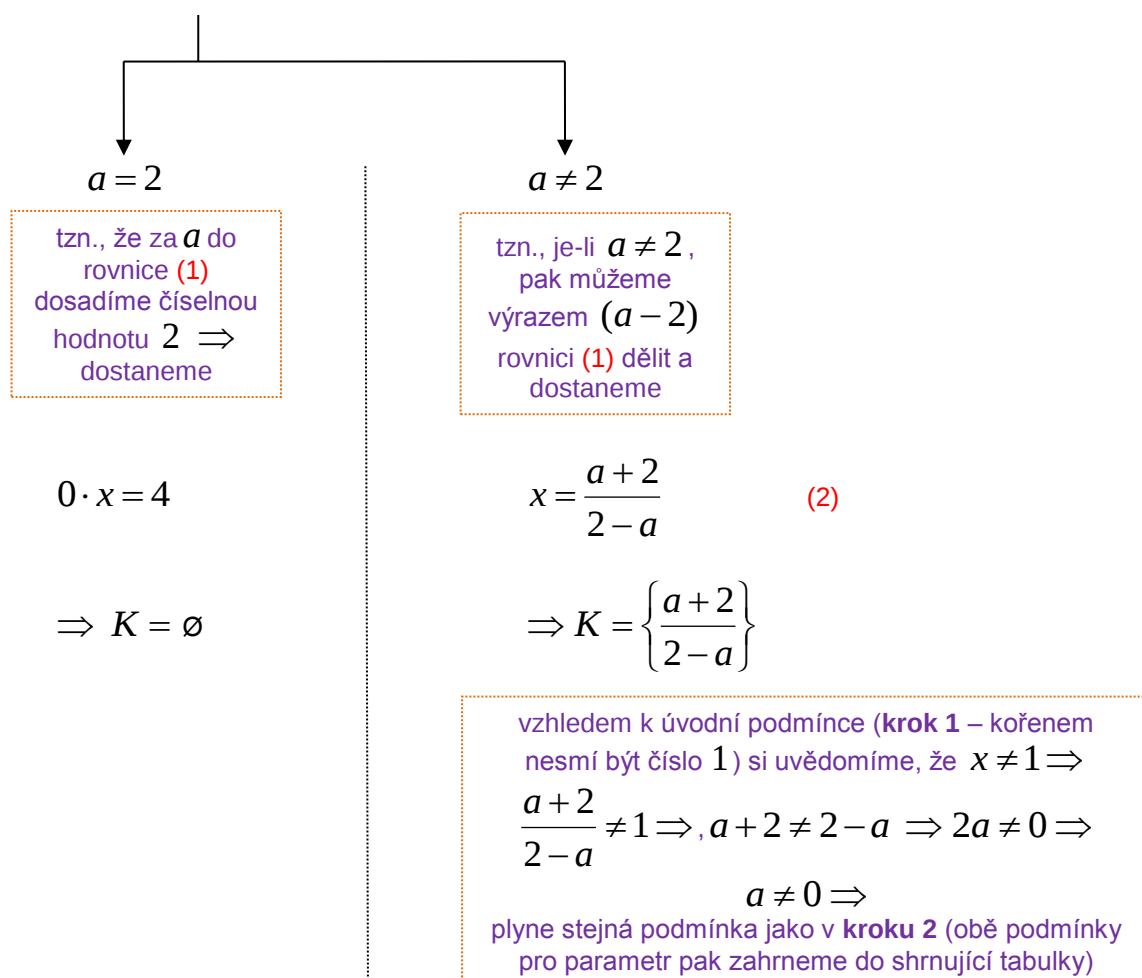
$$a \neq 2$$

Proto **vedeme diskusi**, zda

$$(2-a=0) \Rightarrow (a=2)$$

$$(2-a \neq 0) \Rightarrow (a \neq 2)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



4) Provedeme zkoušku:

- Pro $a = 2$ zkoušku provádět nemusíme, vzhledem ke $K = \emptyset$
- Pro ostatní hodnoty parametru ($a \neq 0; 2$) provádíme zkoušku najednou, dosazením vypočteného kořene rovnice $x \quad (2)$ za neznámou x do původního zadání rovnice

$$L\left(\frac{a+2}{2-a}\right) = \frac{2-a}{a}$$

$$P\left(\frac{a+2}{2-a}\right) = \frac{2}{\frac{a+2}{2-a} - 1} = \frac{2}{\frac{a+2-2+a}{2-a}} = \frac{2}{\frac{2a}{2-a}} = 2 \cdot \frac{2-a}{2a} = \frac{2-a}{a}$$

$$L\left(\frac{a+2}{2-a}\right) = P\left(\frac{a+2}{2-a}\right)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5) Výsledky shrneme do tabulky:

a	K
$a = 2$	$\emptyset$
$a \neq 0 \wedge a \neq 2$	$\left\{ \frac{a+2}{2-a} \right\}$

Řešený příklad 2

Řešte v R rovnici $1 + \frac{a^2 - 1}{x} = a$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Řešení:

- Musíme uvést podmínky pro neznámou $x \Rightarrow x \neq 0$
- Rovnici následně řešíme známými ekvivalentními a důsledkovými úpravami:

$$1 + \frac{a^2 - 1}{x} = a \quad / \cdot x$$

odstraníme zlomek

$$x + a^2 - 1 = ax$$

výrazy s neznámou x převedeme na jednu stranu rovnice; všechny ostatní výrazy převedeme na opačnou stranu rovnice

$$x - ax = 1 - a^2$$

neznámou x osamostatníme vytknutím před závorku; pravou stranu rovnice rozložíme podle vzorce $(a - b)^2$

$$x(1 - a) = (1 - a)(1 + a) \quad (1)$$

Položme si otázku: Lze dělit výrazem $(1 - a)$?

Proto vedeme diskusi, zda

$$(1 - a = 0) \Rightarrow (a = 1)$$

$$(1 - a \neq 0) \Rightarrow (a \neq 1)$$

$$a = 1$$

$$a \neq 1$$

tzn., že za a do rovnice (1) dosadíme číselnou hodnotu 1 $\Rightarrow$ dostaneme

$$0 \cdot x = 0$$

tzn., je-li $a \neq 1$, pak můžeme výrazem $(a - 1)$ rovnici (1) dělit a dostaneme

$$x = \frac{(1 - a)(1 + a)}{1 - a} = 1 + a \quad (2)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\Rightarrow K = R - \{0\}$$

vzhledem
k definičnímu
oboru rovnice
(úvodní podmínce
pro neznámou –
krok 1; $x \neq 0$)

$$\Rightarrow K = \{1+a\}$$

vzhledem k úvodní podmínce (krok 1 – kořenem
nesmí být číslo 0) si uvědomíme, že $x \neq 0 \Rightarrow$
 $1+a \neq 0 \Rightarrow a \neq -1 \Rightarrow$
plyne další podmínka pro parametr $\Rightarrow a \neq -1; 1$
(obě podmínky pro parametr pak zahrneme do
shrnující tabulky)

3) Provedeme zkoušku:

- Pro $a = 1$ zkoušku provádět nemusíme vzhledem ke $K = R - \{0\}$
- Pro ostatní hodnoty parametru $a \neq 1$ provádíme zkoušku dosazením vypočteného kořene rovnice x (2) za neznámou x do původního zadání rovnice

$$L(a+1) = 1 + \frac{a^2 - 1}{a+1} = 1 + \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} = 1 + a - 1 = a; \quad a \neq -1$$

$$P(a+1) = a$$

$$L(a+1) = P(a+1)$$

- Pro $a = -1$ provedeme zkoušku dosazením této hodnoty do původního zadání rovnice:

$$1 + \frac{(-1)^2 - 1}{x} = -1 \Rightarrow 1 + \frac{1-1}{x} = -1 \Rightarrow 1 + \frac{0}{x} = -1 \Rightarrow 1+0 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -2 \Rightarrow K = \emptyset$$

4) Výsledky shrneme do tabulky:

a	K
$a = 1$	$R - \{0\}$
$a = -1$	$\emptyset$
$ a \neq 1$	$\{a+1\}$

Řešený příklad 3

Řešte v R rovnici $p(2-p)x = 4p$ s neznámou x a parametrem $p \in R$.

Řešení:

1) Rovnici řešíme známými ekvivalentními úpravami:

$$p(2-p)x = 4p \quad (1)$$

rovnice je již upravena tak, že neznámá x se nachází na levé straně rovnice a je již osamostatněna (vytknuta) $\Rightarrow$ provedeme diskusi řešení rovnice vzhledem k parametru p

Položme si otázku: **Lze dělit výrazem $p(2-p)$?**

Proto vedeme diskusi, zda

$$(p = 0)$$

$$(2-p=0) \Rightarrow (p=2)$$

$$(p \neq 0 \wedge 2-p \neq 0) \Rightarrow (p \neq 0; 2)$$

$$p = 0$$

tzn., že za p do rovnice (1) dosadíme číselnou hodnotu 0 $\Rightarrow$ dostaneme

$$0 \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow K = R$$

$$p = 2$$

tzn., že za p do rovnice (1) dosadíme číselnou hodnotu 2 $\Rightarrow$ dostaneme

$$0 \cdot x = 8$$

$$\Rightarrow K = \emptyset$$

$$p \neq 0; 2$$

tzn., je-li $p \neq 0; 2$, pak můžeme výrazem $p(p-2)$ rovnici (1) dělit a dostaneme

$$x = \frac{4p}{p(2-p)} = \frac{4}{2-p}$$

$$\Rightarrow K = \left\{ \frac{4}{2-p} \right\} \quad (2)$$

2) Provedeme zkoušku:

a) Pro $p = 0$ a $p = 2$ zkoušku provádět nemusíme vzhledem k množině kořenů.

b) Pro ostatní hodnoty parametru ($p \neq 0; 2$) provádíme zkoušku najednou dosazením vypočteného kořene rovnice x (2) za neznámou x do původního zadání rovnice s parametrem

$$L\left(\frac{4}{2-p}\right) = p(2-p) \frac{4}{2-p} = 4p$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$P\left(\frac{4}{2-p}\right) = 4p$$

$$L\left(\frac{4}{2-p}\right) = P\left(\frac{4}{2-p}\right)$$

3) Výsledky shrneme do tabulky:

p	K
$p = 0$	R
$p = 2$	$\emptyset$
$p \neq 0; 2$	$\left\{\frac{4}{2-p}\right\}$

Řešený příklad 4

Řešte v R rovnici $\frac{2+ax}{a+x} = 2a$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Řešení:

- Musíme uvést podmínky pro neznámou $x \Rightarrow x \neq -a$
- Rovnici následně řešíme v množině $R - \{-a\}$ známými úpravami:

$$\frac{2+ax}{a+x} = 2a \quad | \cdot (a+x)$$

odstraníme zlomek

$$2+ax = 2a(a+x)$$

závorky roznásobíme

$$2+ax = 2a^2 + 2ax$$

výrazy s neznámou x převedeme na jednu stranu rovnice; všechny ostatní výrazy převedeme na opačnou stranu rovnice

$$2 - 2a^2 = ax$$

výrazy upravíme

$$ax = 2(1-a^2)$$

pravou stranu rozložíme užitím vzorce $(a-b)^2$

$$ax = 2(1-a)(1+a) \quad (1)$$

Položme si otázku: Lze dělit konstantou a ?

Proto vedeme diskusi, zda

$$(a = 0)$$

$$(a \neq 0)$$

$$a = 0$$

$$a \neq 0$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$a = 0$$

tzn., že za a do
rovnice (1)
dosadíme číselnou
hodnotu 0 $\Rightarrow$
dostaneme

$$0 \cdot x = 2$$

$$\Rightarrow K = \emptyset$$

$$a \neq 0$$

tzn., je-li $a \neq 0$,
pak můžeme
konstantou a
rovnici (1) dělit a
dostaneme

$$x = \frac{2(1-a)(1+a)}{a} = \frac{2(1-a^2)}{a} \quad (2)$$

$$\Rightarrow K = \left\{ \frac{2(1-a^2)}{a} \right\}$$

vzhledem k úvodní podmínce (krok 1 – kořenem nesmí být
číslo $-a$) si uvědomíme, že $x \neq -a \Rightarrow$

$$\frac{2(1-a^2)}{a} \neq -a \Rightarrow \frac{2-2a^2}{a} + a \neq 0 \Rightarrow \frac{2-a^2}{a} \neq 0$$

$$\Rightarrow 2-a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm\sqrt{2} \Rightarrow$$

plyne další podmínka pro parametr $\Rightarrow a \neq \pm\sqrt{2}$
(všechny podmínky pro parametr pak zahrneme do
shrnující tabulky)

3) Provedeme zkoušku:

a) Pro $a = 0$ zkoušku provádět nemusíme vzhledem ke $K = \emptyset$

b) Pro ostatní hodnoty parametru $a \neq 0; \pm\sqrt{2}$ provádíme zkoušku dosazením vypočteného kořene rovnice x (2) za neznámou x do původního zadání rovnice s parametrem (zkoušku již ponecháváme na čtenáři)

$$L\left(\frac{2(1-a^2)}{a}\right) = \frac{2 + a \cdot \frac{2(1-a^2)}{a}}{a + \frac{2(1-a^2)}{a}} = \frac{2 + 2(1-a^2)}{\frac{a^2 + 2 - 2a^2}{a}} = \frac{2 + 2 - 2a^2}{\frac{a^2 + 2 - 2a^2}{a}} =$$

$$(4 - 2a^2) \cdot \frac{a}{a^2 + 2 - 2a^2} = 2(2 - a^2) \cdot \frac{a}{2 - a^2} = 2a$$

$$P\left(\frac{2(1-a^2)}{a}\right) = 2a$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$L\left(\frac{2(1-a^2)}{a}\right) = P\left(\frac{2(1-a^2)}{a}\right)$$

c) Pro $a = \pm\sqrt{2}$ nemá daná rovnice žádné řešení.

4) Výsledky shrneme do tabulky:

a	K
$a = 0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}$	$\emptyset$
$a \neq 0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}$	$\left\{\frac{2(1-a^2)}{a}\right\}$

Řešený příklad 5

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $p^3x - 1 = px + p$ s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$.

Řešení:

1) Rovnici řešíme známými ekvivalentními úpravami:

$$p^3x - 1 = px + p$$

$$p^3x - px = p + 1$$

$$px(p^2 - 1) = p + 1$$

$$xp(p-1)(p+1) = p+1$$

(1)

výrazy s neznámou x převedeme na jednu stranu rovnice; všechny ostatní výrazy převedeme na opačnou stranu rovnice

neznámou x osamostatníme vytknutím před závorku

levou stranu rovnice rozložíme užitím vzorce $(a-b)^2$

Položme si otázku: **Lze dělit výrazem $p(p-1)(p+1)$?**

Proto **vedeme diskusi**, zda

$$(p = 0)$$

$$(p - 1 = 0) \Rightarrow (p = 1)$$

$$(p + 1 = 0) \Rightarrow (p = -1)$$

$$(p \neq 0; 1; -1)$$

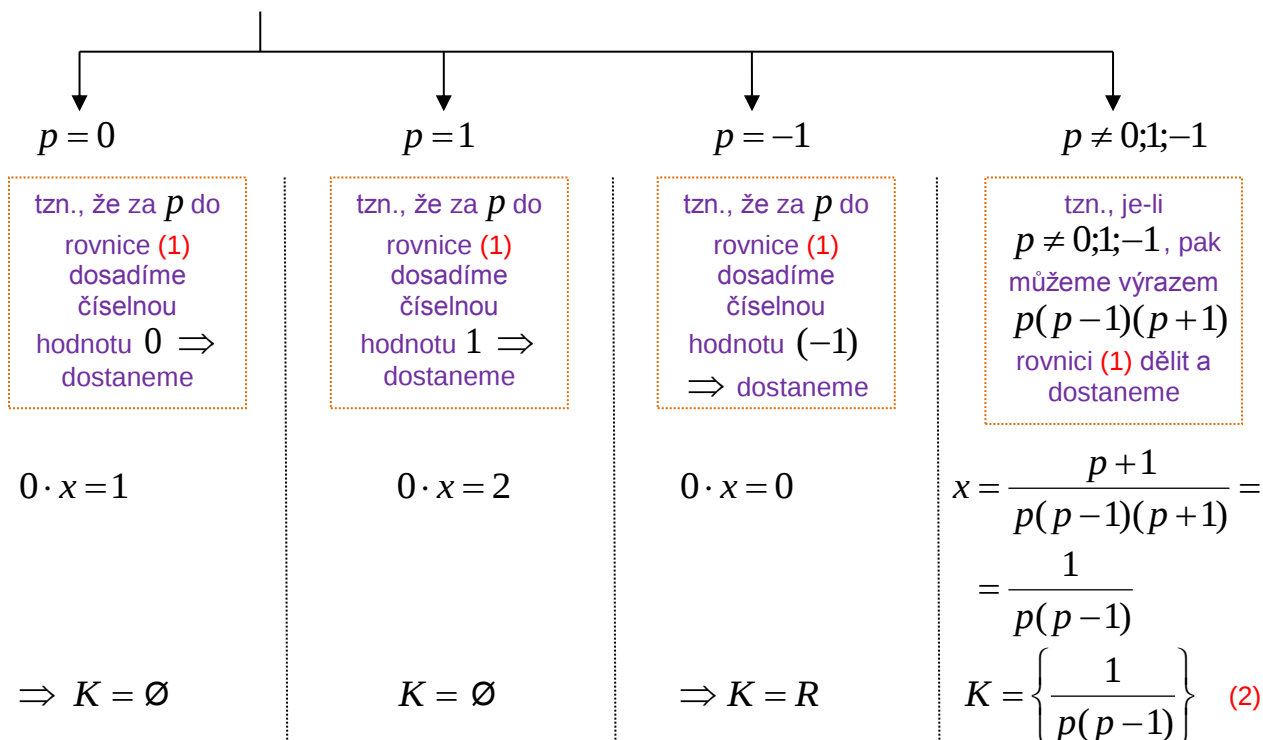
$$p = 0$$

$$p = 1$$

$$p = -1$$

$$p \neq 0; 1; -1$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



2) Provedeme zkoušku:

- Pro $p = 0; 1; -1$ zkoušku provádět nemusíme vzhledem k množině kořenů.
- Pro ostatní hodnoty parametru ($p \neq 0; 1; -1$) provádíme zkoušku najednou dosazením vypočteného kořene rovnice x (2) za neznámou x do původního zadání rovnice s parametrem

$$L\left(\frac{1}{p(p-1)}\right) = p^3 \cdot \frac{1}{p(p-1)} - 1 = \frac{p^2}{p-1} - 1 = \frac{p^2 - (p-1)}{p-1} = \frac{p^2 - p + 1}{p-1}$$

$$P\left(\frac{1}{p(p-1)}\right) = p \cdot \frac{1}{p(p-1)} + p = \frac{1}{p-1} + p = \frac{1 + p(p-1)}{p-1} = \frac{p^2 - p + 1}{p-1}$$

$$L\left(\frac{1}{p(p-1)}\right) = P\left(\frac{1}{p(p-1)}\right)$$

3) Výsledky shrneme do tabulky:

p	K
$p = 0$	$\emptyset$
$p = 1$	$\emptyset$
$p = -1$	R
$p \neq 0; 1; -1$	$\left\{ \frac{1}{p(p-1)} \right\}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Procvičování:

- 1) Řešte v R rovnici $px + 3 - p = x$ s neznámou x a parametrem $p \in R$.

Výsledek:

Pro $p = 1$ je $K = \emptyset$.

Pro $p \neq 1$ je $K = \left\{ \frac{p-3}{p-1} \right\}$

- 2) Řešte v R rovnici $p^2(x-1) = px - 1$ s neznámou x a parametrem $p \in R$.

Výsledek:

Pro $p = 0$ je $K = \emptyset$.

Pro $p = 1$ je $K = R$.

Pro $p \neq 0; 1$ je $K = \left\{ \frac{p+1}{p} \right\}$

- 3) Řešte v R rovnici $(x-5)(p-3) = 2x$ s neznámou x a parametrem $p \in R$.

Výsledek:

Pro $p = 5$ je $K = \emptyset$.

Pro $p \neq 5$ je $K = \left\{ \frac{5(p-3)}{p-5} \right\}$.

- 4) Řešte v R rovnici $(x+3)(x-p) = x^2 + 3x - 9$ s neznámou x a parametrem $p \in R$.

Výsledek:

Pro $p = 0$ je $K = \emptyset$.

Pro $p \neq 0$ je $K = \left\{ \frac{3(3-p)}{p} \right\}$.

- 5) Řešte v R rovnici $(p^2 - 1)x = p - 1$ s neznámou x a parametrem $p \in R$.

Výsledek:

Pro $p = -1$ je $K = \emptyset$.

Pro $p = 1$ je $K = R$.

Pro $p \neq -1; 1$ je $K = \left\{ \frac{1}{p+1} \right\}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 6) Řešte v R rovnici $\frac{2a(x-1)}{x+1} = 5$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Výsledek:

Rovnice má smysl pro $x \neq -1$

Pro $p = 0; \frac{5}{2}$ je $K = \emptyset$.

Pro $p \neq 0; \frac{5}{2}$ je $K = \left\{ \frac{2a+5}{2a-5} \right\}$.

- 7) Řešte v R rovnici $\frac{m}{x} - \frac{4}{mx} = 1 - \frac{2}{m}$ s neznámou x a parametrem $m \in R$.

Výsledek:

Rovnice má smysl pro $x \neq 0$.

Rovnice má smysl pro $m \neq 0$.

Pro $m = 2$ je $K = R - \{0\}$.

Pro $m = -2$ je $K = \emptyset$.

Pro $m \neq 0 \wedge |m| \neq 2$ je $K = \{m+2\}$.

- 8) Řešte v R rovnici $\frac{k^2(x-1)}{kx-2} = 2$ s neznámou x a parametrem $k \in R$.

Výsledek:

Rovnice má smysl pro $x \neq \frac{2}{k}$.

Pro $k = 0$ je $K = \emptyset$.

Pro $k = 2$ je $K = R - \{1\}$.

Pro $k \neq 0 \wedge k \neq 2$ je $K = \left\{ \frac{k+2}{k} \right\}$.

- 9) Řešte v R rovnici $\frac{a}{1+x} = \frac{6}{x}$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Výsledek:

Rovnice má smysl pro $x \neq 0; -1$

Pro $a = 0; 6$ je $K = \emptyset$.

Pro $m \neq 0; 6$ je $K = \left\{ \frac{6}{a-6} \right\}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

10) Řešte v R rovnici $m^2x = m(x + 2) - 2$ s neznámou x a parametrem $m \in R$.

Výsledek:

Pro $m = 0$ je $K = \emptyset$.

Pro $m = 1$ je $K = R$.

Pro $m \neq 0; 1$ je $K = \left\{ \frac{2}{m} \right\}$.

11) Řešte v R rovnici $a(x - 1) = x + a$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Výsledek:

Pro $a = 1$ je $K = \emptyset$.

Pro $a \neq 1$ je $K = \left\{ \frac{2a}{a-1} \right\}$.

12) Řešte v R rovnici $\frac{2x}{2x-a} = a+1$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Výsledek:

Rovnice má smysl pro $x \neq \frac{a}{2}$.

Pro $a = 0$ je $K = R - \{0\}$.

Pro $a \neq 0$ je $K = \left\{ \frac{a+1}{2} \right\}$.

13) Řešte v R rovnici $\frac{a(x-2)}{x+2} = 8$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Výsledek:

Rovnice má smysl pro $x \neq -2$

Pro $a = 0; 8$ je $K = \emptyset$.

Pro $m \neq 0; 8$ je $K = \left\{ \frac{2(a+8)}{a-8} \right\}$.

14) Řešte v R rovnici $(x+3)(x-c) = x^2 + 3x - 18$ s neznámou x a parametrem $c \in R$.

Výsledek:

Pro $c = 3$ je $K = R$.

Pro $c \neq 3$ je $K = \{-6\}$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

15) Řešte v R rovnici $x(a+2) + a(x+1) = 2 - a$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Výsledek:

Pro $a = -1$ je $K = \emptyset$.

Pro $a \neq -1$ je $K = \left\{ \frac{1-a}{a+1} \right\}$.

16) Řešte v R rovnici $x(1-a) + a(1-x) - 2a = 0$ s neznámou x a parametrem $a \in R$.

Výsledek:

Pro $a = \frac{1}{2}$ je $K = \emptyset$.

Pro $a \neq \frac{1}{2}$ je $K = \left\{ \frac{a}{1-2a} \right\}$.

Použitá literatura:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

F. Janeček: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus 1995

E. Fuchs, F. Procházka: Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborné školy, Prometheus 2002

I. Dušek: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN 1988

M. Hudcová, I. Kubičková: Sběrka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium, Prometheus 2004