

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MECHANIKA	DRUHÝ	ŠČERBOVÁ M. PAVELKA V.	8. ZÁŘÍ 2013
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
VZPĚR			

VZPĚR

U všech předcházejících druhů namáhání byla funkce součásti ohrožena překročením přípustného napětí nebo deformace. U vzpěrné pevnosti jde o problém stability. Je nutné najít sílu, při jejímž překročení ztratí prut stabilitu. Tuto sílu nazýváme **kritickou silou na mezi vzpěrné pevnosti**.

Kritériem pro výpočet na vzpěr je **štíhlost prutu**

$$\lambda = \frac{l_{red}}{i} = \frac{l_0}{\sqrt{\frac{I_{min}}{S}}}$$

- kde l_{red} – redukovaná délka prutu, jejíž velikost je závislá na způsobu uchycení konců prutu, (ve strojnických tabulkách $l_{red} = l_0$),
 i – poloměr kvadratického momentu průřezu (ve strojnických tabulkách $i = j$),
 I_{min} – minimální kvadratický moment průřezu (ve strojnických tabulkách $I = J$),
 S – plošný obsah průřezu prutu.

Rozměrová rovnice pro štíhlost prutu:

$$1 = \frac{mm}{\sqrt{\frac{mm^4}{mm^2}}} = \frac{mm}{\sqrt{mm^2}} = \frac{mm}{mm} = 1.$$

Dochází-li k porušení stability v pružné oblasti, tj. napětí od zatěžujících sil leží pod mezí úměrnosti σ_u materiálu prutu, mluvíme o pružné oblasti vzpěru. Pro tuto oblast platí podmínka:

$$\lambda > \lambda_m, \text{ kde } \lambda_m - \text{mezní štíhlost (hodnoty mezní štíhlosti jsou uvedeny ve strojnických tabulkách).}$$

Řešení prutu v oblasti pružného vzpěru provádíme podle **Eulera**. Eulerovy vztahy jsou uvedeny ve strojnických tabulkách. Kritická síla závisí na rozměrech prutu, na způsobu uložení konců prutu a na modulu pružnosti v tahu. Jestliže je štíhlostní poměr menší než mezní štíhlost ($\lambda < \lambda_m$), nacházíme se v oblasti nepružného vzpěru. Součást namáhanou nepružným vzpěrem počítáme podle **Tetmajerovy–Jasinského** rovnice. Rovnice jsou uvedeny ve strojnických tabulkách a platí pro napětí od meze úměrnosti σ_u do meze kluzu σ_k (R_e).

V praxi nepočítáme s kritickou silou, ale s provozním zatížením F , které je rovno

$$F = \frac{F_{kr}}{k},$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

kde k je součinitel bezpečnosti, který u strojních součástí kolísá v širokých mezích.

U příhradových konstrukcí je normou předepsán výpočet pomocí **součinitele vzpěrnosti c** . Tohoto způsobu výpočtu se nesmí použít pro strojní součásti, u kterých bezpečnost kolísá ve značných mezích. (Hodnoty součinitele vzpěrnosti jsou uvedeny ve strojnických tabulkách).

Výpočet podle Tetmajerovy–Jasinského rovnice i výpočet pomocí součinitele vzpěrnosti jsou výpočty pouze kontrolní. Musíme nejprve jiným způsobem průřez určit a teprve pak provést kontrolu. Podle Eulera můžeme provést výpočet únosnosti i návrhový výpočet.

ÚLOHA 1

Pístní tyč klikového mechanismu přenáší osovou tlakovou sílu $F = 35\,000\text{ N}$. Její délka $l = 2,4\text{ m}$ a průřez $d = 60\text{ mm}$. Materiál pístní tyče je ocel **11 600**. Zjistěte, zda pístní tyč vyhovuje pro součinitel bezpečnosti $k = 6$. Předpokládejte druhý způsob uložení tyče.

ŘEŠENÍ:

$$\lambda = \frac{l_{red}}{j} = \frac{l_o}{i} = \frac{l}{\sqrt{\frac{I_{min}}{S}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}}} = \frac{l}{\frac{d}{4}} = \frac{4 \cdot l}{d} = \frac{4 \cdot 2\,400}{60} = 160$$

Mezní štíhlost pro nelegované oceli $\lambda_m = 99 \div 105$ je převzata ze strojnických tabulek.

$\lambda > \lambda_m \rightarrow$ oblast pružného vzpěru (výpočet podle Eulera)

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{l^2}$$

$$I_{min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 60^4}{64} = 635\,850\text{ mm}^4$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 635\,850}{2\,400^2} = 228\,565,6\text{ N}$$

$$k = \frac{F_{kr}}{F} = \frac{228\,565,6}{35\,000} = 6,53$$

$$6,53 > 6$$

Pístní tyč vyhovuje pro součinitel bezpečnosti $k = 6$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 2

Dřevěný čtvercový trám o straně a je zatížen osovou tlakovou silou $F = 40 \text{ kN}$. Vypočítejte stranu a , je-li délka trámu $l = 5,8 \text{ m}$. Požadovaná míra bezpečnosti $k = 6$, modul pružnosti v tahu $E = 10^4 \text{ MPa}$. Předpokládejme druhý způsob uložení trámu.

ŘEŠENÍ:

$$k = \frac{F_{kr}}{F} \Rightarrow F_{kr} = k \cdot F = 6 \cdot 40\,000 = 240\,000 \text{ N}$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \Rightarrow I_{min} = \frac{F_{kr} \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{240\,000 \cdot 5\,800^2}{\pi^2 \cdot 10^4} = 81\,802\,670,9 \text{ mm}^4$$

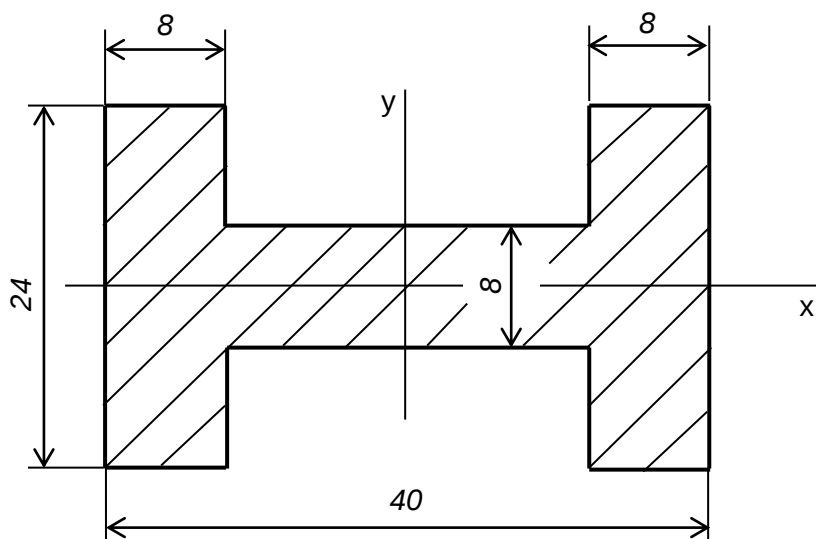
$$I_{min} = I_x = \frac{a^4}{12} \Rightarrow a = \sqrt[4]{12 \cdot I_x} = \sqrt[4]{12 \cdot 81\,802\,670,9} = 177 \text{ mm}$$

Rozměr trámu zaokrouhlíme na $a = 180 \text{ mm}$.

ÚLOHA 3

Ojnice motoru z materiálu **11 500** má délku $l = 300 \text{ mm}$ a průřez dle obrázku. Průměr pístu $D = 100 \text{ mm}$, maximální přetlak ve válci $p_{max} = 3,5 \text{ MPa}$. Provedte kontrolu ojnice v rovině kyvu. V této rovině jsou oba konce ojnice kloubově uložené. Požadovaná bezpečnost $k = 5$.

ŘEŠENÍ:



Průřez **S** ojnice

$$S = 40 \cdot 24 - 16 \cdot 24 = 576 \text{ mm}^2$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kvadratický moment průřezu

$$I_y = \frac{24 \cdot 40^3}{12} - \frac{16 \cdot 24^3}{12} = 109\,568 \text{ mm}^4$$

Štíhlost prutu

$$\lambda = \frac{l_{red}}{j} = \frac{l_o}{i} = \frac{l}{\sqrt{\frac{I_y}{S}}} = \frac{300}{\sqrt{\frac{109\,568}{576}}} = 21,74$$

$\lambda < \lambda_m \rightarrow$ oblast nepružného vzpěru (výpočet podle Tetmajerovy–Jasinského rovnice)

Kritické napětí pro ocel 11 500 je převzato ze strojnických tabulek.

$$\sigma_{kr} = 335 - 0,62 \cdot \lambda = 335 - 0,62 \cdot 21,74 = 321,53 \text{ MPa}$$

$$F_{kr} = S \cdot \sigma_{kr} = 576 \cdot 321,53 = 185\,201,3 \text{ N}$$

$$F_{max} = S \cdot p_{max} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot p_{max} = \frac{\pi \cdot 100^2}{4} \cdot 3,5 = 27\,488,9 \text{ N}$$

Bezpečnost

$$k = \frac{F_{kr}}{F_{max}} = \frac{185\,201,3}{27\,488,9} = 6,73$$

Bezpečnost je v přípustných mezích. Vlastní řešení by mohlo být počítáno na prostý tlak vzhledem k malé štíhlosti λ :

$$\sigma_{dmax} = \frac{F_{max}}{S} = \frac{27\,488,9}{576} = 47,7 \text{ MPa}$$

Vypočtené napětí je menší než dovolené napětí σ_{Dd} ($\sigma_{Dd} = 90 \text{ MPa}$).

Výpočet pomocí součinitele vzpěrnosti

ÚLOHA 4

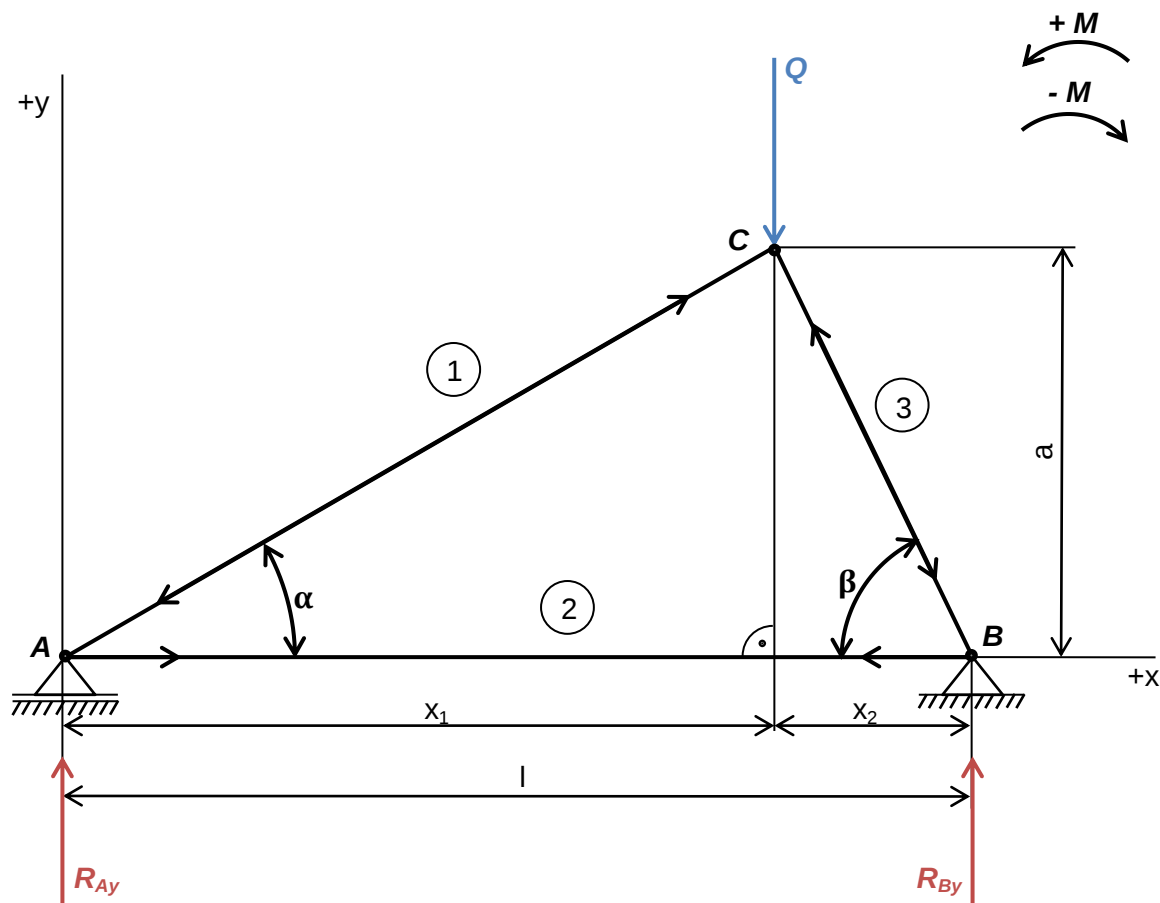
U příhradové konstrukce určete:

1. Velikost a směr působení sil v prutech.
2. Navrhněte profil TR 4HR pro prut (1) z prostého tlaku a teprve pak proveďte kontrolu pomocí součinitele vzpěrnosti.
3. Navrhněte profil TR 4HR pro prut (3) z prostého tlaku a teprve pak proveďte kontrolu pomocí součinitele vzpěrnosti.

Zadané hodnoty: $Q = 10\,000 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 4 \text{ m}$, $a = 1,8 \text{ m}$, **materiál – 11 373, statické zatížení.**

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ:



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{x_2} = \frac{1,8}{0,88} = 2,045 \Rightarrow \beta = 63,95^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1,8}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 3,12 \text{ m}$$

$$x_2 = l - x_1 = 4 - 3,12 = 0,88 \text{ m}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$R_{By} \cdot l - Q \cdot x_1 = 0$$

$$R_{By} = \frac{Q \cdot x_1}{l} = \frac{10\,000 \cdot 3,12}{4} = 7\,800 \text{ N}$$

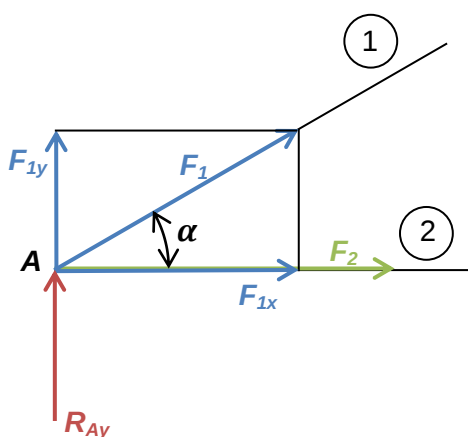
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - Q + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} = Q - R_{By} = 10\,000 - 7\,800 = 2\,200\text{ N}$$

STYČNÍK – A



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$F_{1x} + F_2 = 0$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} + F_{1y} = 0$$

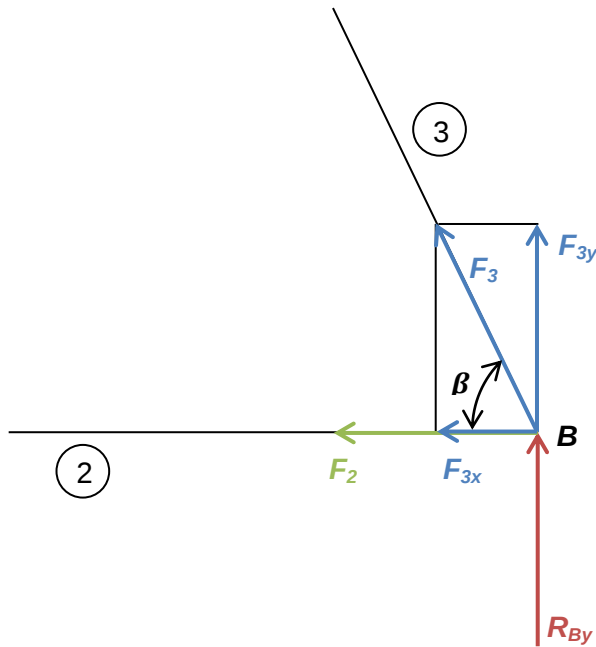
$$R_{Ay} + F_1 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$F_1 = -\frac{R_{Ay}}{\sin \alpha} = -\frac{2\,200}{\sin 30^\circ} = -4\,400\text{ N}$$

$$F_2 = -F_{1x} = -F_1 \cdot \cos \alpha = -(-4\,400) \cdot \cos 30^\circ = 3\,810,5\text{ N}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STYČNÍK – B



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$-F_2 - F_{3x} = 0$$

$$-F_2 - F_3 \cdot \cos \beta = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{By} + F_{3y} = 0$$

$$R_B + F_3 \cdot \sin \beta = 0$$

$$F_3 = -\frac{R_{By}}{\sin \beta} = -\frac{7\,800}{\sin 63,95^\circ} = -8\,682 \text{ N}$$

$$-F_2 - F_3 \cdot \cos \beta = 0$$

$$-3\,810,5 + 8\,682 \cdot \cos 63,95^\circ = 0$$

$$0 = 0$$

Profil prutu (1) předběžně určíme z pevnostní rovnice v tlaku. Dovolené tlakové napětí volíme menší.

$$\sigma_d = \frac{F_1}{S} \leq \sigma_{Dd}$$

$$\sigma_{Dd} = \sigma_{Dt} = \frac{R_e}{k} = \frac{0,6 \cdot R_m}{k} = \frac{0,6 \cdot 370}{2} = 111 \text{ MPa}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro výpočet volíme $\sigma_{Dd} = 60 \text{ MPa}$

$$S = \frac{F_1}{\sigma_{Dd}} = \frac{4\,400}{60} = 73,3 \text{ mm}^2$$

Zvolíme profil TR 4HR 20 × 1,25 – ČSN 426935.1 – 11 373.0.

Délka prutu (1)

$$\sin \alpha = \frac{a}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{1,8}{\sin 30^\circ} = 3,6 \text{ m}$$

Vypočteme štíhlost prutu (1) a zjistíme součinitel vzpěrnosti

$$\lambda = \frac{l_o}{i} = \frac{l_1}{i} = \frac{3\,600}{7,54} = 477,5$$

Norma pro různé materiály připouští maximální možné λ . Vzhledem k tomu, že λ je větší, je nutno volit tužší průřez.

Zvolíme profil TR 4HR 50 × 2 – 3 600 – ČSN 42 6935.1 – 11 373.0.

$$\lambda = \frac{l_o}{i_{min}} = \frac{l_1}{i_{min}} = \frac{3\,600}{19,4} = 185,6$$

Součinitel vzpěrnosti $c = 5,18$ pro $\lambda = 200$.

Kontrolu provedeme ze vztahu

$$\sigma_d = \frac{F_1 \cdot c}{S} = \frac{4\,400 \cdot 5,18}{368,7} = 61,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_d < \sigma_{Dd}$$

Navržený profil vyhovuje.

Profil prutu (3) předběžně určíme z pevnostní rovnice v tlaku. Dovolené tlakové napětí volíme menší .

$$\sigma_d = \frac{F_3}{S} \leq \sigma_{Dd}$$

$$\sigma_{Dd} = \sigma_{Dt} = \frac{R_e}{k} = \frac{0,6 \cdot R_m}{k} = \frac{0,6 \cdot 370}{2} = 111 \text{ MPa}$$

Pro výpočet volíme $\sigma_{Dd} = 60 \text{ MPa}$

$$S = \frac{F_3}{\sigma_{Dd}} = \frac{8\,682}{60} = 144,7 \text{ mm}^2$$

Zvolíme profil 25 × 2 – ČSN 42 6935.1 – 11 373.0.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Délka prutu (3)

$$l_3 = \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{0,88^2 + 1,8^2} = 2,01 \text{ m}$$

Vypočteme štíhlost prutu (3) a zjistíme součinitel vzpěrnosti

$$\lambda = \frac{l_o}{i} = \frac{l_3}{i} = \frac{2\,010}{9,2} = 218,4$$

Vzhledem k tomu, že λ je větší, je nutno volit tužší průřez. Zvolíme profil TR 4HR 50 × 2 – ČSN 42 6935.1 – 11 373.0.

$$\lambda = \frac{l_o}{i_{min}} = \frac{l_3}{i_{min}} = \frac{2\,010}{19,4} = 103,6$$

Součinitel vzpěrnosti $c = 1,99$ pro $\lambda = 110$. Kontrolu provedeme ze vztahu

$$\sigma_d = \frac{F_3 \cdot c}{S} = \frac{8\,682 \cdot 1,99}{368,7} = 46,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_d < \sigma_{Dd}$$

Navržený profil vyhovuje.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] MRŇÁK, L. a DRDLA, A. Mechanika pružnost a pevnost pro SPŠ strojnické. 3. opravené vyd. Praha: SNTL, 1980. 366 s.

[2] SKÁLA, V. a STEJSKAL, V. Mechanika pro SPŠ nestrojnické. 3. vyd. Praha: SNTL, 1986. 207 s.

[3] LEINVEBER, J., VÁVRA, P. Strojnické tabulky: Pomocná učebnice pro školy technického zaměření. Čtvrté doplněné vydání. Úvaly: Albra, 2008, 914 s. ISBN 978-80-7361-051-7.