

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MECHANIKA	DRUHÝ	ŠČERBOVÁ M. PAVELKA V.	11. SRPNA 2013
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
SLOŽENÁ NAMÁHÁNÍ			

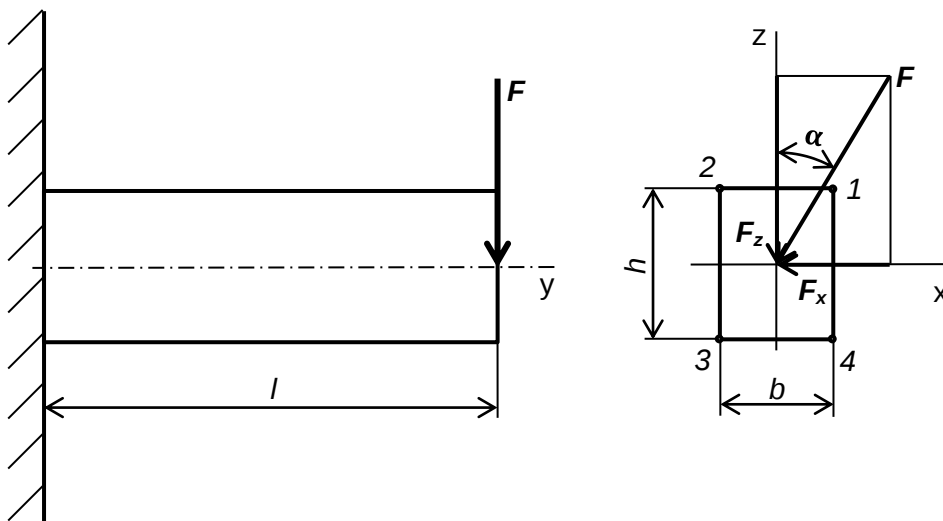
SLOŽENÁ NAMÁHÁNÍ

Ke složenému namáhání dojde tehdy, vyskytnou-li se současně alespoň dva druhy namáhání.

Úlohy řešíme tak, že je rozložíme na jednoduchá namáhání, pro která vyřešíme průběh napětí a deformací. Z těchto dílčích napětí hledáme pak výsledná napětí, případně výslednou deformaci. Pokud jsou napětí stejného druhu, tedy obě normálová nebo obě tečná, lze je algebraicky sčítat v každém bodě průřezu. Jsou-li napětí nesourodá, tedy normálová i tečná, nelze je sčítat ani algebraicky, ani vektorově, ale můžeme využít teorie pevnosti.

A) KOMBINACE NORMÁLOVÝCH NAPĚTÍ

ŠIKMÝ OHYB



U šikmého ohybu rozložíme působící sílu na složky ve směru osy x a z .

Síla F_x způsobí moment kolem osy z , síla F_z pak moment kolem osy x .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Určíme napětí způsobené oběma momenty v nebezpečném průřezu a tato napětí algebraicky sloučíme. Výsledné napětí musí vyhovovat podmínce:

$$\sigma_{o,max} = \sigma_{o1} + \sigma_{o2} \leq \sigma_{Dt(d)}.$$

ÚLOHA 1

Vetknutý nosník obdélníkového průřezu je na volném konci ohýbán silou $F = 8\,000\text{ N}$, která svírá se svislou osou souměrnosti úhel $\alpha = 30^\circ$. Určete rozměry průřezu, je-li dána délka nosníku $l = 1\text{ m}$, poměr stran $b:h = 0,5$, dovolené napětí ohybové $\sigma_{Do} = 100\text{ MPa}$.

ŘEŠENÍ:

$$F_z = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_z = 8\,000 \cdot \cos 30^\circ$$

$$F_z = 6\,928,2\text{ N}$$

$$F_x = F \cdot \sin \alpha$$

$$F_x = 8\,000 \cdot \sin 30^\circ$$

$$F_x = 4\,000\text{ N}$$

$$M_{oz,max} = F_z \cdot l = 6\,928,2 \cdot 1\text{ Nm} \doteq 6\,928,2\text{ Nm} \doteq 6,93 \cdot 10^3\text{ Nm}$$

$$M_{ox,max} = F_x \cdot l = 4\,000 \cdot 1\text{ Nm} \doteq 4\,000 \cdot 1 \doteq 4\,000\text{ Nm} = 4 \cdot 10^3\text{ Nm}$$

$$\sigma_{o1} = \frac{M_{oz,max}}{W_0} = \frac{M_{oz,max}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{M_{oz,max}}{\frac{h \cdot h^2}{6}} = \frac{M_{oz,max}}{\frac{h^3}{6}} = \frac{12 \cdot 6,93 \cdot 10^3}{h^3} = \frac{83,16 \cdot 10^3}{h^3}$$

$$\sigma_{o2} = \frac{M_{ox,max}}{W_0} = \frac{M_{ox,max}}{\frac{h \cdot b^2}{6}} = \frac{M_{ox,max}}{\frac{h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2}{6}} = \frac{M_{ox,max}}{\frac{h^3}{24}} = \frac{24 \cdot 4 \cdot 10^3}{h^3} = \frac{96 \cdot 10^3}{h^3}$$

$$\sigma_{o1} + \sigma_{o2} \leq \sigma_{Do}$$

$$\frac{83,16 \cdot 10^3}{h^3} + \frac{96 \cdot 10^3}{h^3} = \sigma_{Do}$$

$$\frac{179,16 \cdot 10^3}{h^3} = \sigma_{Do}$$

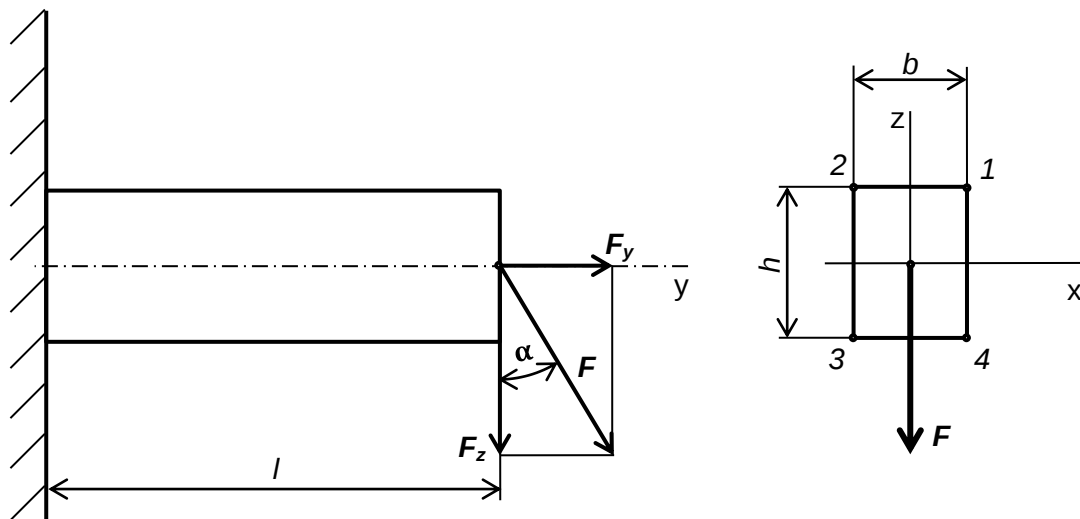
$$h = \sqrt[3]{\frac{179,16 \cdot 10^3}{\sigma_{Do}}} = \sqrt[3]{\frac{179,16 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6}} = 0,122\text{ m} = 122\text{ mm}$$

$$b = \frac{h}{2} = \frac{122}{2} = 61\text{ mm}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TAH NEBO TLAK S OHYBEM

TAH S OHYBEM



Rozložíme sílu F na složky v ose y a z a řešíme účinky každé síly samostatně. Výsledky pak algebraicky sečteme. Smykové napětí vyvolané silou F_z zanedbáme.

Účinkem síly $F_y = F \cdot \sin \alpha$ vzniká napětí tahové

$$\sigma_t = \frac{F_y}{S} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{b \cdot h},$$

které namáhá všechny průřezy stejně.

V místě vetknutí vzniká napětí v ohybu

$$\sigma_o = \pm \frac{M_{o,max}}{W_o} = \pm \frac{F_z \cdot l}{W_o} = \pm \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot l}{W_o}.$$

Ve vláknech **1** a **2** působí maximální napětí

$$\sigma_{v,max} = \sigma_t + \sigma_o.$$

Ve vláknech **3** a **4** pak vzniká minimální napětí

$$\sigma_{v,min} = \sigma_t - \sigma_o.$$

Tečné napětí můžeme zanedbat proto, že je maximální tam, kde je normálové napětí nulové a naopak. Nemůžeme je však zanedbat na volném konci nosníku a u nosníků velmi krátkých.

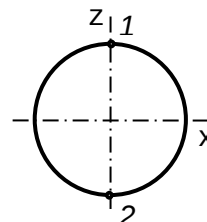
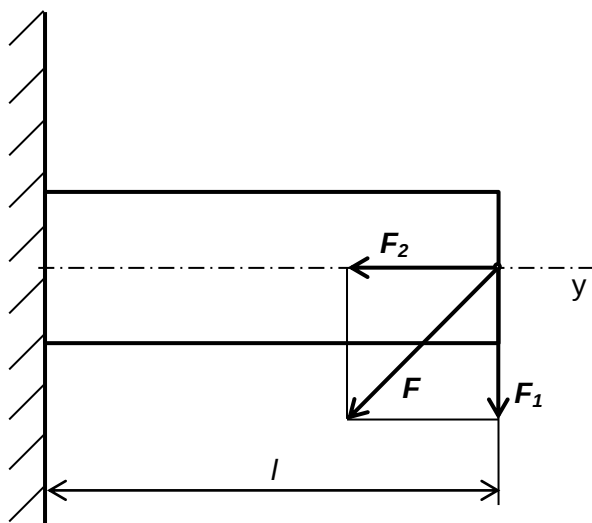
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TLAK S OHYBEM

ÚLOHA 2

U vetknutého nosníku určete velikost síly F . Zadané hodnoty: průměr nosníku $d = 300 \text{ mm}$, délka nosníku $l = 2 \text{ m}$, síla $F_1 = F_2$, $\sigma_{v,max} = -7 \text{ MPa}$.

ŘEŠENÍ:



$$\sigma_d = -\frac{F_2}{S} = -\frac{F_1}{S}$$

$$\sigma_o = -\frac{M_{o,max}}{W_o} = -\frac{F_1 \cdot l}{W_o}$$

$$\sigma_{v,max} (2) = -\sigma_d - \sigma_o$$

$$-7 = \frac{F_1}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} - \frac{F_1 \cdot l}{0,1 \cdot d^3}$$

$$-7 = -F_1 \cdot \left(\frac{1}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} + \frac{l}{0,1 \cdot d^3} \right)$$

$$-7 = -F_1 \cdot \left(\frac{1}{\frac{\pi \cdot 300^2}{4}} + \frac{2\,000}{0,1 \cdot 300^3} \right)$$

$$F_1 = \frac{7}{\frac{1}{\frac{\pi \cdot 300^2}{4}} + \frac{2\,000}{0,1 \cdot 300^3}} = 9\,273 \text{ N}$$

$$F_2 = F_1 = 9\,273 \text{ N}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{9\,273^2 + 9\,273^2} = 13\,114\,N$$

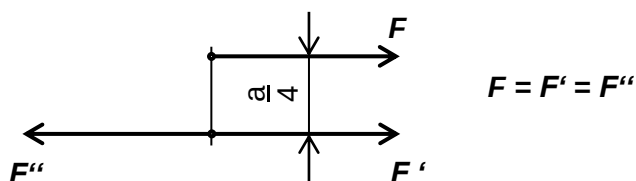
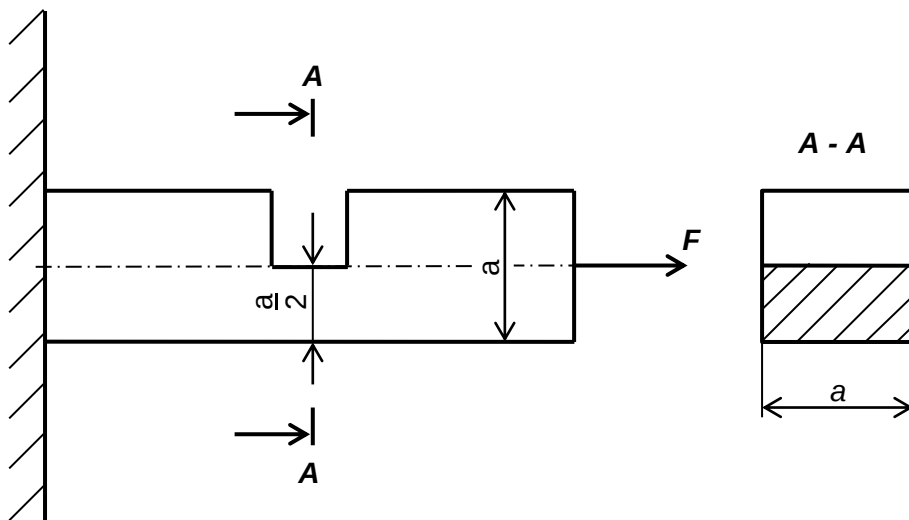
EXCENTRICKÝ TAH

Pro excentrický tah platí stejné vztahy jako pro tah nebo tlak s ohybem. Rozdíl je pouze v tom, že všechny průřezy jsou namáhány stejně tahem i ohybem a že odpadá smyková síla. Maximální napětí je na zatížené polovině průřezu. Působící síla musí však ležet na ose souměrnosti, jinak by se jednalo o dvouosý ohyb a tah. Při návrhovém výpočtu postupujeme tak, že vypočteme rozměry průřezu jen na ohyb, ty pak o něco zvětšíme a provedeme kontrolní výpočet na složené napětí.

ÚLOHA 3

Určete velikost největšího napětí, které vznikne v zeslabené části strojní součásti zatížené silou $F = 10^4\,N$ a rozměr $a = 100\,mm$.

ŘEŠENÍ:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sigma_t = \frac{F'}{S} = \frac{F}{S} = \frac{F}{a \cdot \frac{a}{2}} = \frac{10^4}{100 \cdot \frac{100}{2}} = 2 \text{ MPa}$$

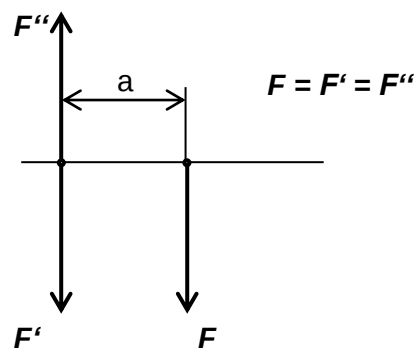
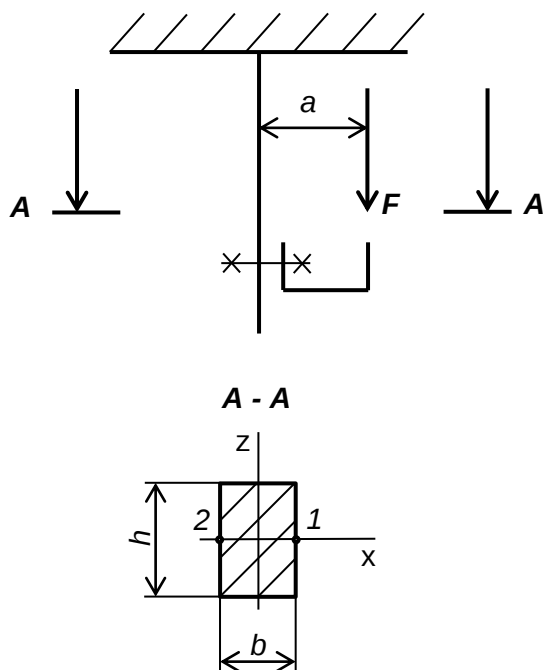
$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{F \cdot \frac{a}{4}}{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a}{6}} = \frac{10^4 \cdot \frac{100}{4}}{\frac{\left(\frac{100}{2}\right)^2 \cdot 100}{6}} = 6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_t + \sigma_o = 2 + 6 = 8 \text{ MPa}$$

ÚLOHA 4

Věšák z plochého železa je zatížen silou $F = 6\,000 \text{ N}$, působící na rameně $a = 80 \text{ mm}$. Určete rozměry b a h pro maximální napětí $\sigma_{max} < 100 \text{ MPa}$. Poměr $b:h = 1:3$.

ŘEŠENÍ:



$$\sigma_o = \frac{M_{o,max}}{W_o} \leq \sigma_{max}$$

$$W_o = \frac{M_{o,max}}{\sigma_{max}} = \frac{F \cdot a}{\sigma_{max}} = \frac{6\,000 \cdot 80}{100} = 4\,800 \text{ mm}^3$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$W_o = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{3b \cdot b^2}{6} = \frac{3 \cdot b^3}{6}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_o}{3}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 4\,800}{3}} = 21,3 \text{ mm}$$

$$b = 22 \text{ mm}$$

$$h = 3 \cdot b = 3 \cdot 22 = 66 \text{ mm}$$

$$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{F}{b \cdot h} = \frac{6\,000}{22 \cdot 66} = 4,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \frac{M_{o,max}}{W_o} = \frac{F \cdot a}{\frac{h \cdot b^2}{6}} = \frac{6 \cdot F \cdot a}{h \cdot b^2} = \frac{6 \cdot 60\,000 \cdot 80}{66 \cdot 22^2} = 90,2 \text{ MPa}$$

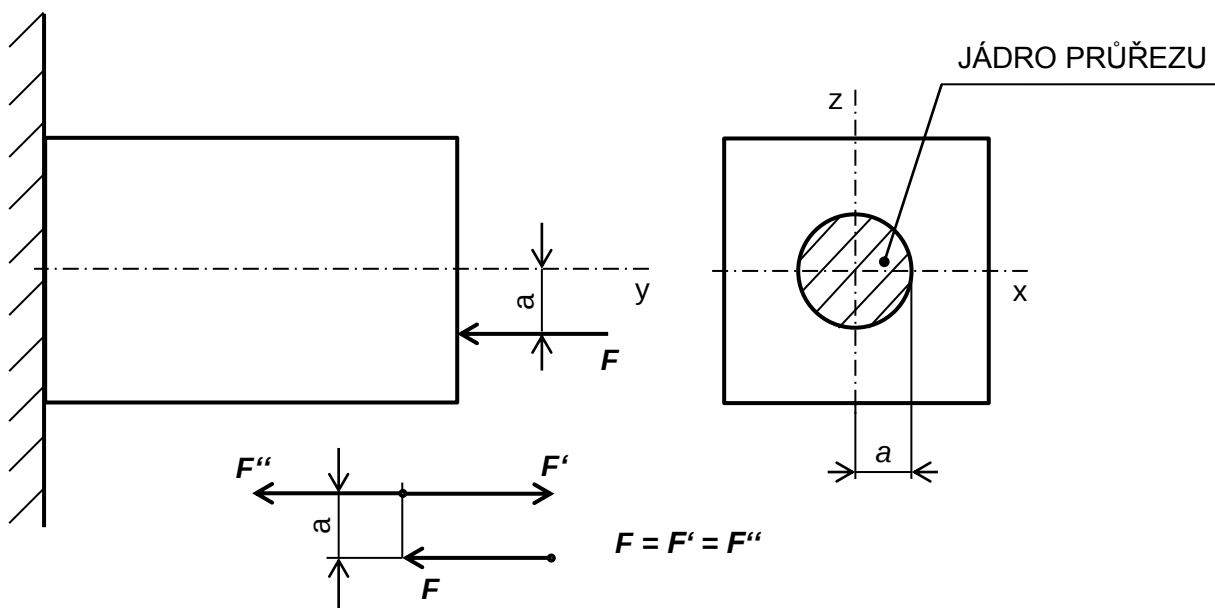
$$\sigma_1 = \sigma_t + \sigma_o = 4,1 + 90,2 = 94,3 \text{ MPa (TAH)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_t - \sigma_o = 4,1 - 90,2 = -86,1 \text{ MPa (TLAK)}$$

$$\sigma_{1,max} < \sigma_{max}(\sigma_{Dt})$$

Navržené rozměry vyhovují.

EXCENTRICKÝ TLAK



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

U excentrického tlaku je každý průřez kolmý k ose nosníku namáhán stejně na tlak a na ohyb napětím $\sigma_{max} = \sigma_d \pm \sigma_o \leq \sigma_{Dd}$, kde $\sigma_d = \frac{F}{S}$ a $\sigma_o = \pm \frac{M_o}{W_o}$. Maximální napětí vznikne v okrajových vláknech, která jsou na té straně od těžiště, kde působí síla. U excentrického tlaku je nutno u materiálu (beton, zdivo), které nesnášejí tahová napětí, vymezit tzv. jádro průřezu, ve kterém musí působit síla, aby tahové napětí nemohlo vzniknout. Pak musí platit

$$|\sigma_d| = |\sigma_o| \rightarrow \frac{F}{S} = \frac{M_o}{W_o} = \frac{F \cdot a}{W_o} \rightarrow a = \frac{W_o}{S}$$

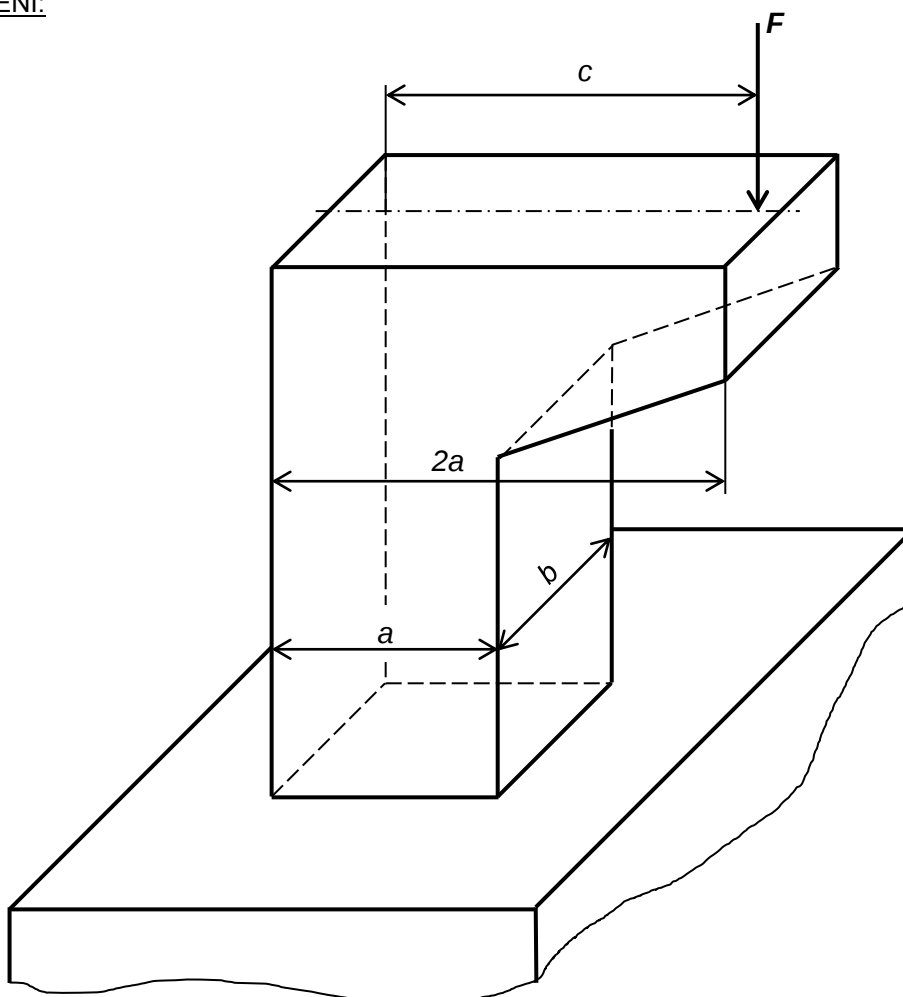
U kruhového jádra platí

$$a = \frac{W_o}{S} = \frac{\frac{\pi \cdot d^3}{32}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{d}{8}$$

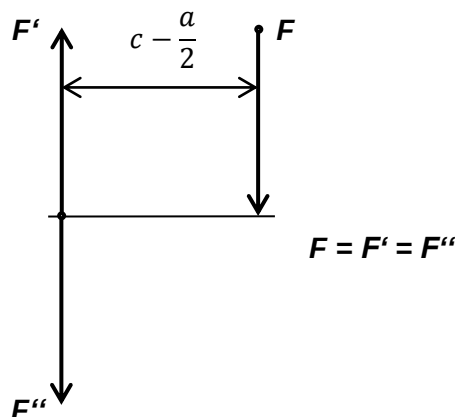
ÚLOHA 5

Určete největší tahové napětí a tlakové napětí u betonového sloupu. Zadané hodnoty: $F = 6\,000\text{ N}$, $2a = 400\text{ mm}$, $b = 180\text{ mm}$, $c = 250\text{ mm}$.

ŘEŠENÍ:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



$$\sigma_d = -\frac{F}{S} = -\frac{F}{b \cdot a} = \frac{6\,000}{280 \cdot 180} = -\frac{1}{6} \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \pm \frac{M_o}{W_o} = \pm \frac{F \cdot \left(c - \frac{a}{2}\right)}{\frac{b \cdot a^2}{2}} = \pm \frac{6\,000 \cdot \left(250 - \frac{200}{2}\right)}{\frac{180 \cdot 200^2}{6}} = \pm 0,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{d,max} = -\sigma_d - \sigma_o = -\frac{1}{6} - 0,75 = -0,92 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t,max} = \sigma_o - \sigma_d = 0,75 - \frac{1}{6} = 0,17 \text{ MPa}$$

B) KOMBINACE NAPĚTÍ NORMÁLOVÝCH A TEČNÝCH

OHYB A KRUT KRUHOVÝCH HŘÍDELŮ

Ohyb a krut kruhových hřídelů je v technické praxi nejčastějším případem složeného namáhání. Obvykle známe ohybový moment M_o , krouticí moment M_k , druh materiálu a velikost dovoleného napětí v ohybu σ_{Do} .

Redukované napětí lze určit podle teorie pevnosti. Pro houževnaté materiály je podle této teorie pevnosti velikost redukovaného napětí dána vztahem.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_o^2 + 3 \cdot (\alpha_B \cdot \tau_K)^2} \leq \sigma_{Do},$$

kde α_B je tzv. **Bachův opravný součinitel**, který se použije tehdy, jestliže normálové napětí je v jiném způsobu zatížení než tečné.

Pokud do vztahu dosadíme za $\sigma_o = \frac{M_o}{W_o}$ a $\tau_K = \frac{M_K}{W_K} = \frac{M_K}{2W_o}$, dostaneme vztah:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{M_o}{W_o}\right)^2 + 3 \cdot \left(\alpha_B \cdot \frac{M_K}{2 \cdot W_o}\right)^2} \leq \sigma_{Do}.$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{M_o^2}{W_o^2} + 3 \cdot \alpha_B^2 \cdot \frac{M_K^2}{4W_o^2}} \leq \sigma_{Do}$$

$$W_o \cdot \sigma_{red} = \sqrt{M_o^2 + 0,75 \cdot (\alpha_B \cdot M_K)^2} \leq W_o \cdot \sigma_{Do}$$

$$M_{Ored} = \sqrt{M_o^2 + 0,75 \cdot (\alpha_B \cdot M_K)^2} \leq W_o \cdot \sigma_{Do}$$

M_{Ored} – redukovaný ohybový moment při výpočtu hřídelů dodržujeme tyto zásady:

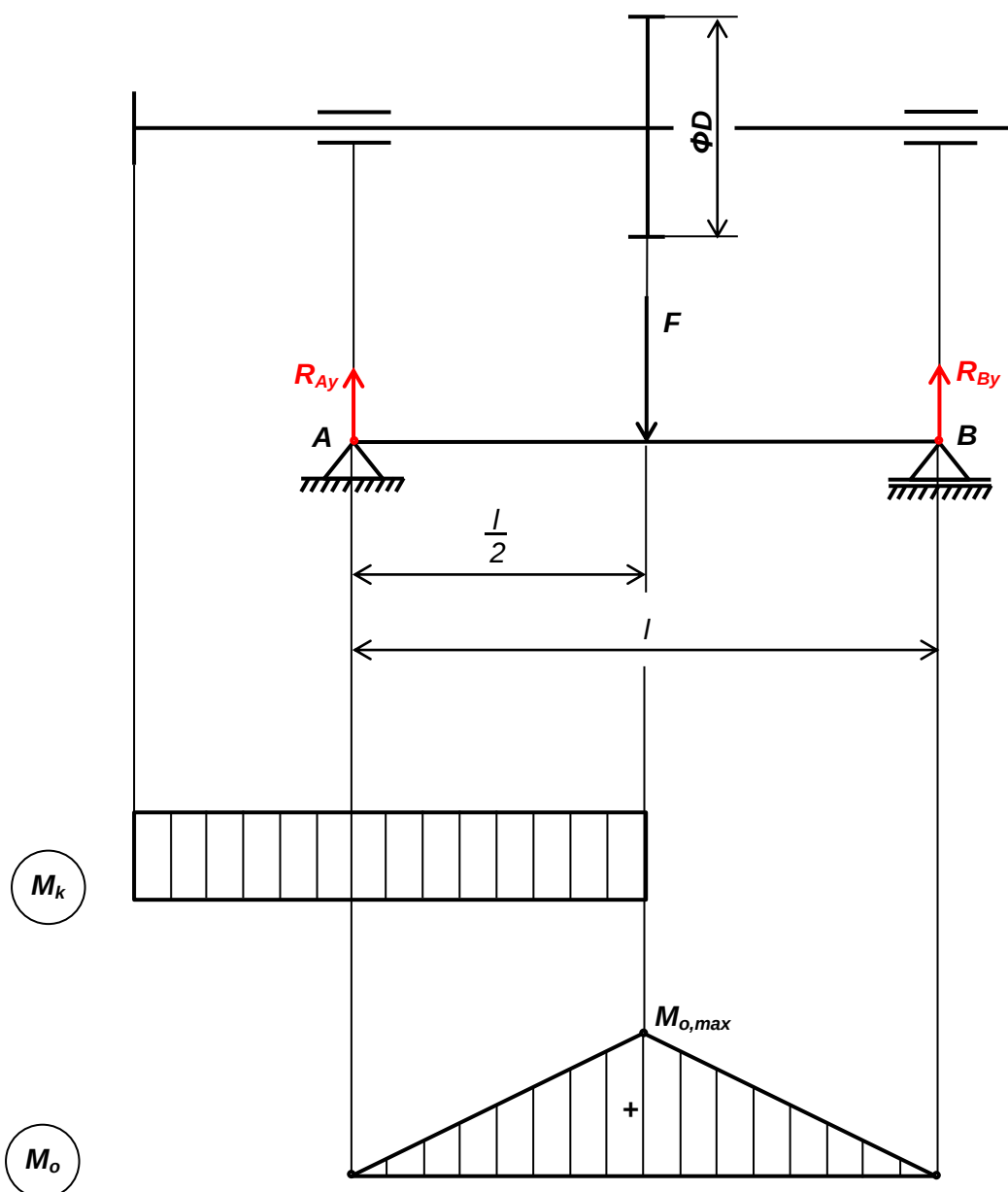
1. volíme malé dovolené hodnoty napětí, asi $\frac{1}{2}$ hodnot uvedených v tabulkách, protože hřídele jsou zeslabeny drážkami, mají osazení a to vede ke vzniku zvýšení napětí. Mimo to musíme zamezit kmitání hřídelů zvýšenou tuhostí.
2. provádíme kontrolu deformace, která musí být v předepsaných mezích.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 6

Proveďte pevnostní kontrolu hnací hřídele jednostupňové převodovky. Zadané hodnoty: výkon elektromotoru $P = 3 \text{ kW}$, otáčky elektromotoru $n_1 = 1420 \text{ min}^{-1}$, vzdálenost středů ložisek $l = 54 \text{ mm}$, zatěžující síla hřídele F působí uprostřed středů ložisek, průměr hřídele pod pastorkem $d_k = 30 \text{ mm}$, průměr roztečné kružnice pastorku $D_1 = 72 \text{ mm}$, $\sigma_{Do} = 60 \text{ MPa}$, $\alpha_B = 0,7$.

ŘEŠENÍ:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ze souměrnosti zatížení plyne:

$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{F}{2}$$

$$M_{k1} = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n_1} = \frac{3\,000}{2 \cdot \pi \cdot \frac{1\,420}{60}} = 20,2 \text{ Nm}$$

$$F = \frac{2 \cdot M_{k1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 20\,200}{72} = 561,1 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = \frac{F}{2} = \frac{561,1}{2} = 280,6 \text{ N}$$

$$M_{o,max} = R_{Ay} \cdot \frac{l}{2} = 280,6 \cdot \frac{54}{2} = 7\,576,2 \text{ Nmm} \doteq 7,58 \text{ Nm}$$

$$M_{o,red} = \sqrt{M_{o,max}^2 + 0,75 \cdot (\alpha_B \cdot M_{k1})^2} = \sqrt{7,58^2 + 0,75 \cdot (0,7 \cdot 20,2)^2} = 14,4 \text{ Nm}$$

$$\frac{M_{o,red}}{W_o} \leq \sigma_{Do}$$

$$\frac{M_{o,red}}{0,1 \cdot d_k^3} \leq \sigma_{Do}$$

$$\frac{14\,400}{0,1 \cdot 30^3} = 5,3 \text{ MPa} \leq \sigma_{Do}$$

POUŽITÁ LITERATURA

[1] MRŇÁK, L. a DRDLA, A. Mechanika pružnost a pevnost pro SPŠ strojnické. 3. opravené vyd. Praha: SNTL, 1980. 366 s.

[2] SKÁLA, V. a STEJSKAL, V. Mechanika pro SPŠ nestrojnické. 3. vyd. Praha: SNTL, 1986. 207 s.