

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

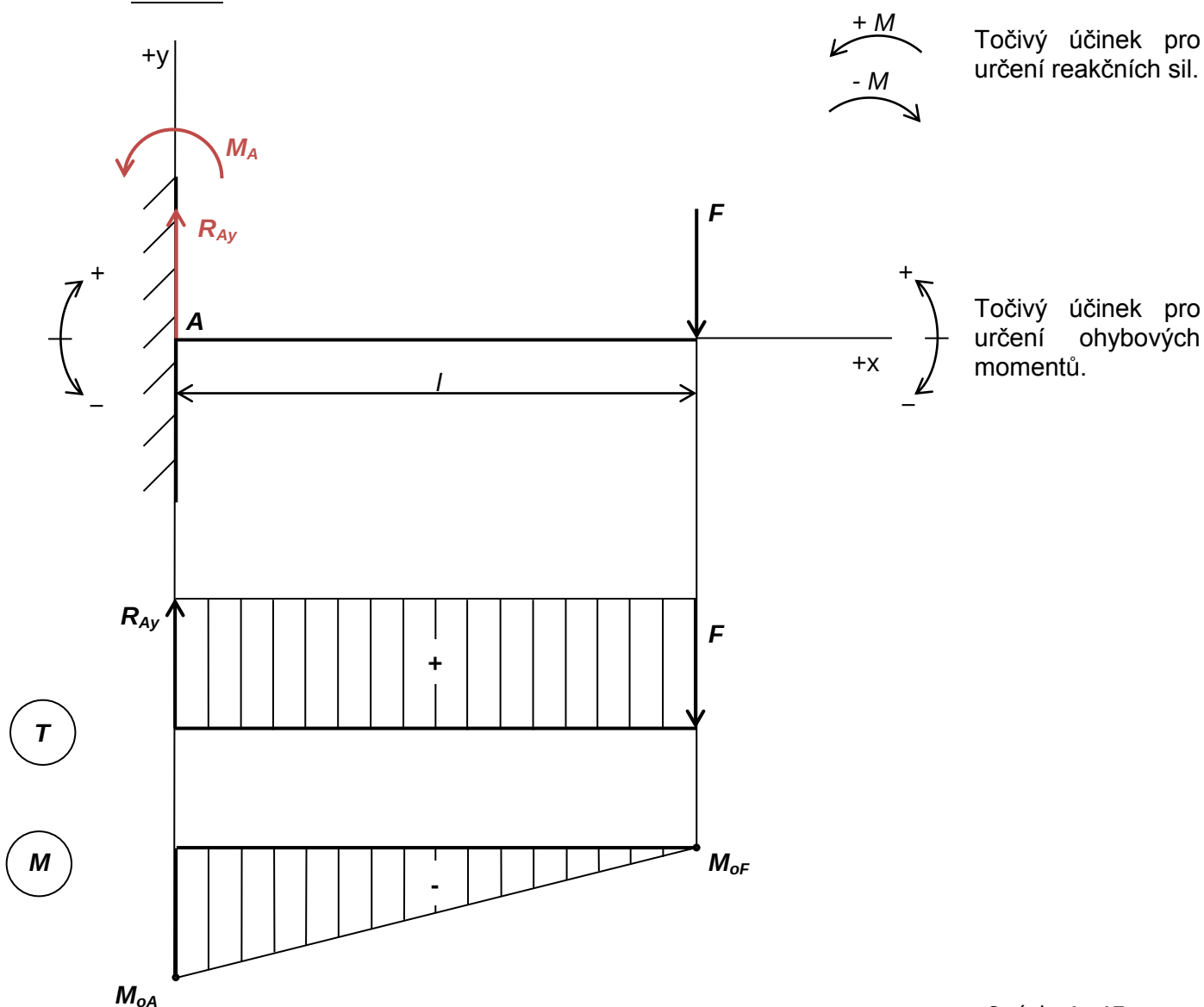
Předmět:	Ročník:	Vytvořil:	Datum:
MECHANIKA	DRUHÝ	ŠČERBOVÁ M. PAVELKA V.	14. ČERVENCE 2013
Název zpracovaného celku:			
NAMÁHÁNÍ NA OHYB			

D) VETKNUTÉ NOSNÍKY ZATÍŽENÉ SOUSTAVOU ROVNOBĚŽNÝCH SIL

ÚLOHA 1

Určete maximální ohybový moment u nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F = 1\,000\text{ N}$ a vzdálenost $l = 0,5\text{ m}$. Zakreslete průběh posouvajících sil a ohybových momentů.

ŘEŠENÍ:





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - F = 0$$

$$R_{Ay} = F = 1\,000\,N$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$-F \cdot l + M_A = 0$$

$$M_A = F \cdot l = 1\,000 \cdot 0,5 = 500\,Nm$$

Ohybové momenty budou řešeny u první úlohy v jednotlivých průřezech z obou stran průřezu:

L – levá strana průřezu,

R – pravá strana průřezu.

$$M_{oF,L} = R_{Ay} \cdot l - M_A = 1\,000 \cdot 0,5 - 500 = 500 - 500 = 0$$

$$M_{oF,R} = 0$$

$$M_{oA,L} = -M_A = -500\,Nm$$

$$M_{oA,R} = -F \cdot l = -1\,000 \cdot 0,5 = -500\,Nm$$

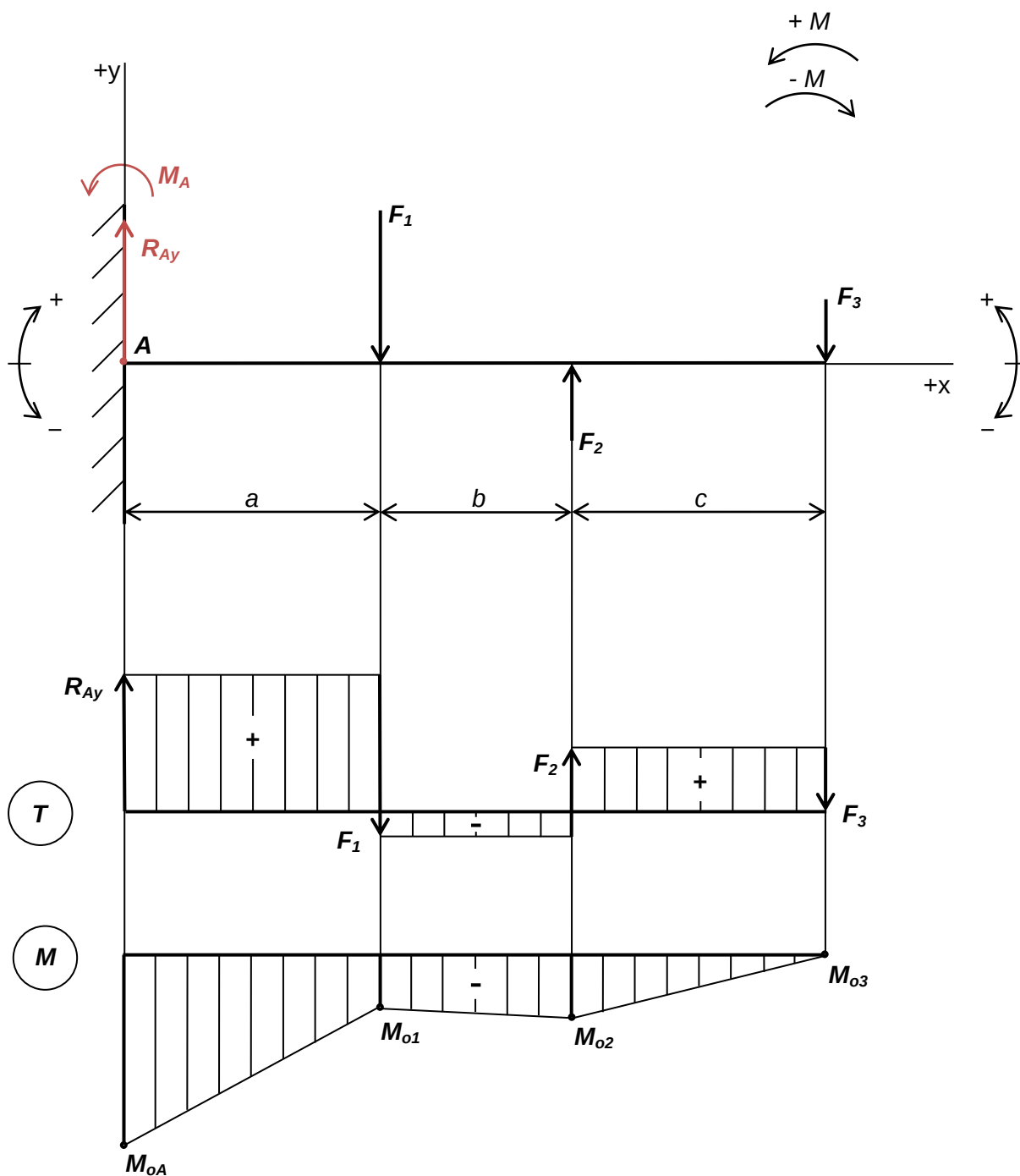
Maximální ohybový moment je M_{oA} .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 2

Určete maximální ohybový moment u nosníku, je-li velikost zatěžujících sil $F_1 = 1\,200\text{ N}$, $F_2 = 600\text{ N}$, $F_3 = 500\text{ N}$ a vzdálenosti $a = c = 0,2\text{ m}$ a $b = 0,15\text{ m}$. Zakreslete průběh posouvajících sil a ohybových momentů.

ŘEŠENÍ:





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$$R_{Ay} = F_1 - F_2 + F_3 = 1\,200 - 600 + 500 = 1\,100\,N$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$-F_3 \cdot (a + b + c) + F_2 \cdot (a + b) - F_1 \cdot a + M_A = 0$$

$$M_A = F_3 \cdot (a + b + c) - F_2 \cdot (a + b) - F_1 \cdot a + M_A =$$

$$= 500 \cdot (0,2 + 0,15 + 0,2) - 600 \cdot (0,2 + 0,15) + 1\,200 \cdot 0,2 = 305\,Nm$$

$$M_{o3} = 0$$

$$M_{o2} = -F_3 \cdot c = -500 \cdot 0,2 = -100\,Nm$$

$$M_{o1} = -F_3 \cdot (b + c) + F_2 \cdot b = -500 \cdot (0,15 + 0,2) + 600 \cdot 0,15 = -85\,Nm$$

$$M_{oA} = -F_3 \cdot (a + b + c) + F_2 \cdot (a + b) - F_1 \cdot a =$$

$$= -500 \cdot (0,2 + 0,15 + 0,2) + 600 \cdot (0,2 + 0,15) - 1\,200 \cdot 0,2 = -305\,Nm$$

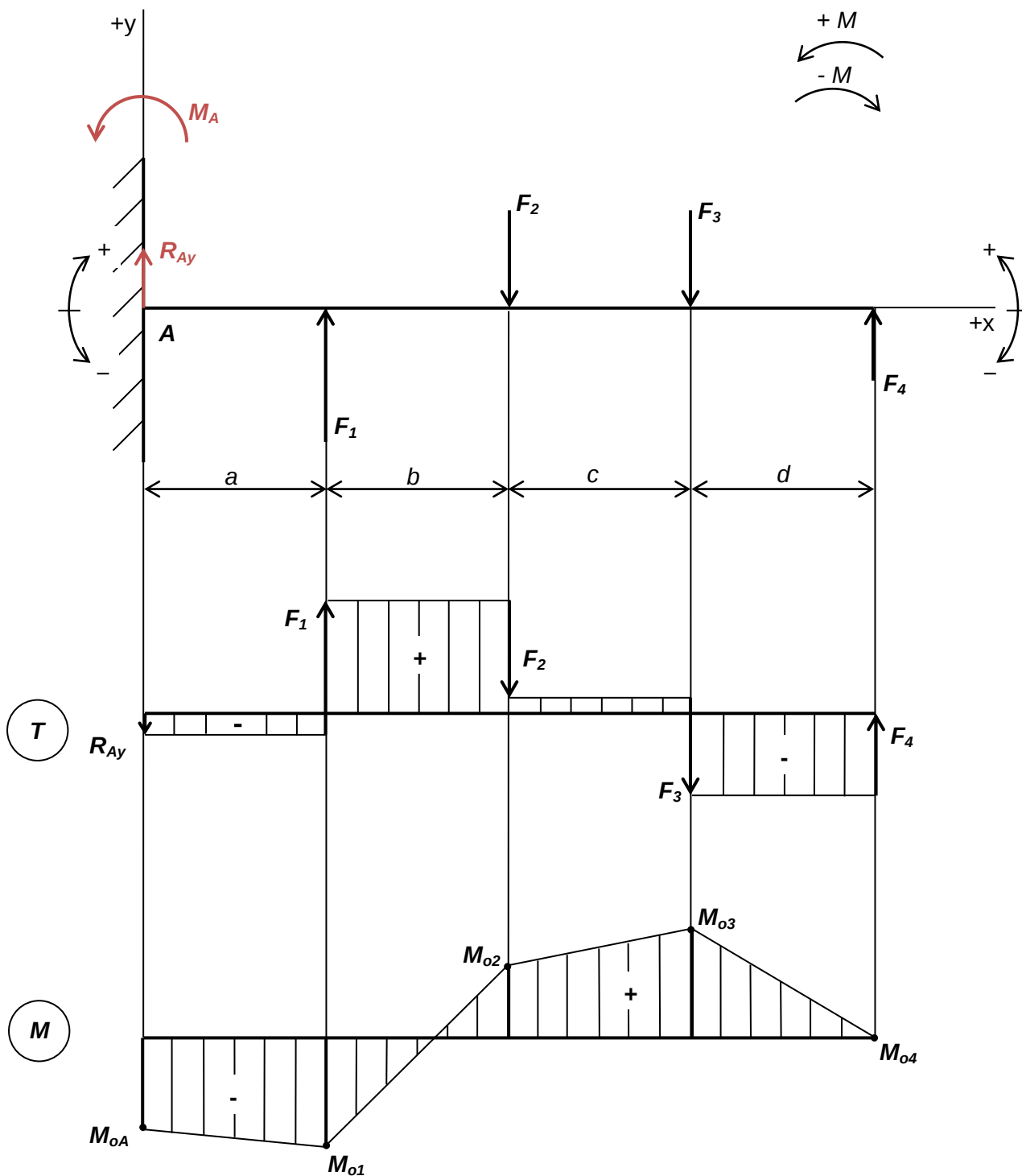
Maximální ohybový moment je M_{oA} .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 3

Určete maximální ohybový moment u nosníku, je-li velikost zatěžujících sil $F_1 = 1\,100\text{ N}$, $F_2 = F_3 = 800\text{ N}$, $F_4 = 600\text{ N}$ a vzdálenosti $a = b = c = d = 0,15\text{ m}$. Zakreslete průběh posouvajících sil a ohybových momentů.

ŘEŠENÍ:





evropský
sociální
fond v ČR



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 0$$

$$R_{Ay} = -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = -1\,100 + 800 + 800 - 600 = -100\,N$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$F_4 \cdot (a + b + c + d) - F_3 \cdot (a + b + c) - F_2 \cdot (a + b) + F_1 \cdot a + M_A = 0$$

$$\begin{aligned} M_A &= -F_4 \cdot (a + b + c + d) + F_3 \cdot (a + b + c) + F_2 \cdot (a + b) - F_1 \cdot a = \\ &= -600 \cdot (0,15 + 0,15 + 0,15 + 0,15) + 800 \cdot (0,15 + 0,15 + 0,15) + 800 \cdot (0,15 + 0,15) - \\ &\quad - 1\,100 \cdot 0,15 = 75\,Nm \end{aligned}$$

$$M_{o4} = 0$$

$$M_{o3} = F_4 \cdot d = 600 \cdot 0,15 = 90\,Nm$$

$$M_{o2} = F_4 \cdot (c + d) - F_3 \cdot c = 600 \cdot (0,15 + 0,15) - 800 \cdot 0,15 = 60\,Nm$$

$$\begin{aligned} M_{o1} &= F_4 \cdot (b + c + d) - F_3 \cdot (b + c) - F_2 \cdot b = \\ &= 600 \cdot (0,15 + 0,15 + 0,15) - 800 \cdot (0,15 + 0,15) - 800 \cdot 0,15 = -90\,Nm \end{aligned}$$

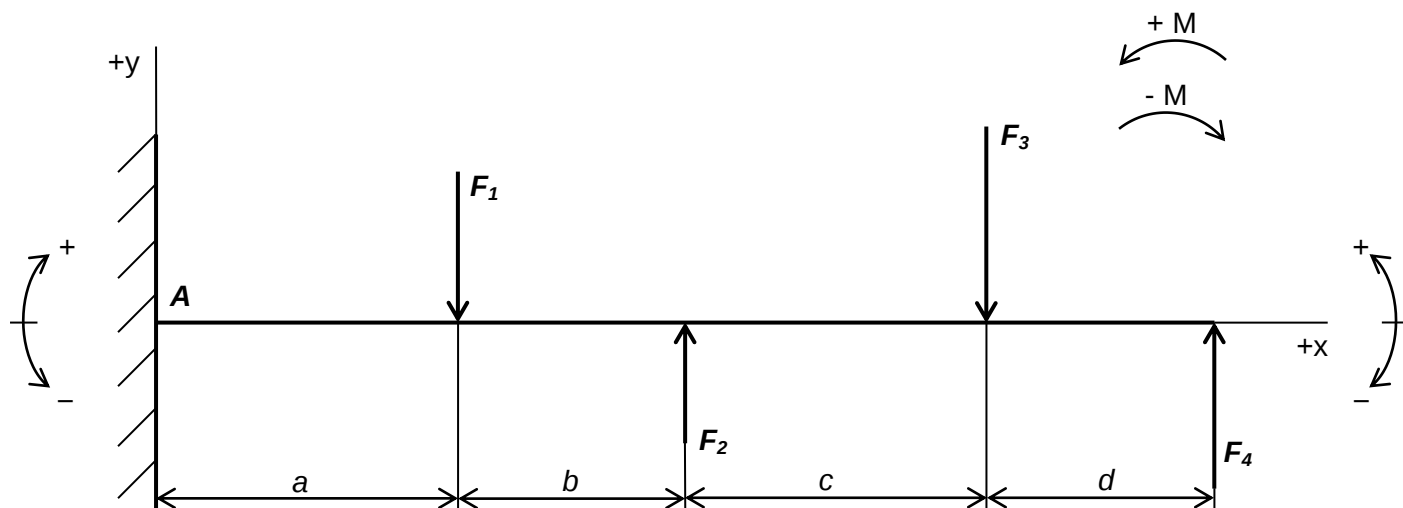
$$\begin{aligned} M_{oA} &= F_4 \cdot (a + b + c + d) - F_3 \cdot (a + b + c) - F_2 \cdot (a + b) + F_1 \cdot a = \\ &= 600 \cdot (0,15 + 0,15 + 0,15 + 0,15) - 800 \cdot (0,15 + 0,15 + 0,15) - 800 \cdot (0,15 + 0,15) + \\ &\quad + 1\,100 \cdot 0,15 = -75\,Nm \end{aligned}$$

Maximální ohybový moment je $|M_{o1}| = M_{o3}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 4

Určete maximální ohybový moment u nosníku, je-li velikost zatěžujících sil $F_1 = 1\,000\text{ N}$, $F_2 = 800\text{ N}$, $F_3 = 1\,300\text{ N}$, $F_4 = 1\,100\text{ N}$ a vzdálenosti $a = c = 0,2\text{ m}$ a $b = d = 0,15\text{ m}$. Zakreslete průběh posouvajících sil a ohybových momentů.



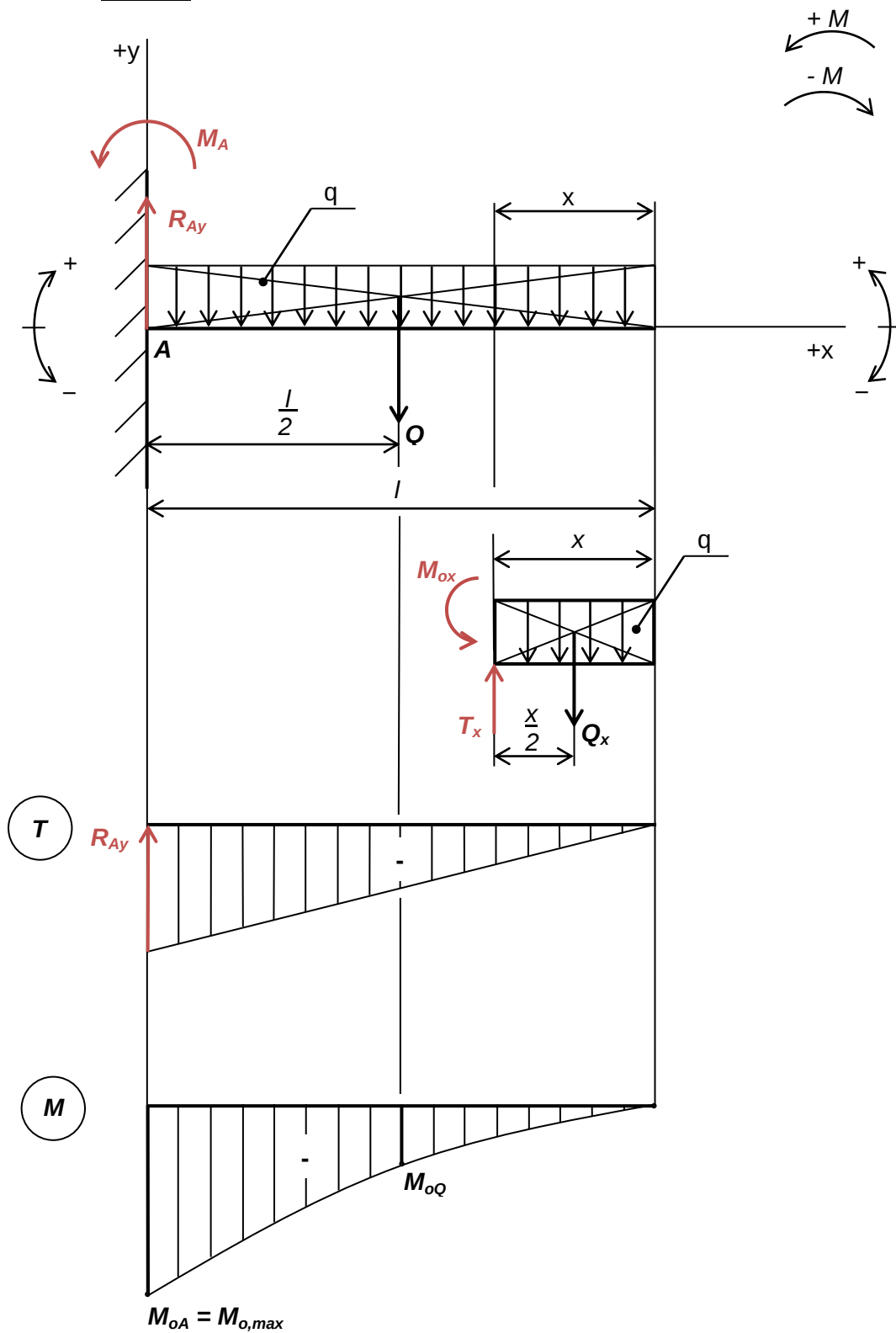
Výsledek: $R_{Ay} = 400\text{ N}$, $M_A = -135\text{ Nm}$, $M_{0,\max} = M_{01} = 215\text{ Nm}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

E) VETKNUTÉ NOSNÍKY ZATÍŽENÉ PO CELÉ DÉLCE SPOJITÝM ZATÍŽENÍM Q

Úlohu budeme řešit jen obecně.

ŘEŠENÍ:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Velikost reakce R_{Ay} určíme z podmínky rovnováhy

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - Q = 0$$

$$R_{Ay} = Q = q \cdot l$$

Ve vzdálenosti x od volného konce nosníku bude platit:

a) Posouvající síla

$$T_x = -Q_x = -q \cdot x.$$

Závislost je lineární.

Hodnoty T_x :

$$\text{pro } x = 0 \text{ bude } T_x = 0,$$

$$\text{pro } x = \frac{l}{2} \text{ bude } T_x = -q \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

$$\text{pro } x = l \text{ bude } T_x = -q \cdot l = R_{Ay}.$$

b) Ohybový moment bude

$$M_{ox} = -Q_x \cdot \frac{x}{2} = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -q \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Závislost je parabolická.

Hodnoty M_{ox} :

$$\text{pro } x = 0 \text{ bude } M_{ox} = 0,$$

$$\text{pro } x = \frac{l}{2} \text{ bude } M_{ox} = -\frac{q \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = -\frac{q \cdot \frac{l^2}{4}}{2} = -\frac{q \cdot l^2}{8},$$

$$\text{pro } x = l \text{ bude } M_{ox} = -\frac{q \cdot l^2}{2} = -\frac{\frac{Q}{l} \cdot l^2}{2} = -\frac{Q \cdot l}{2}.$$

Tento moment je maximální.

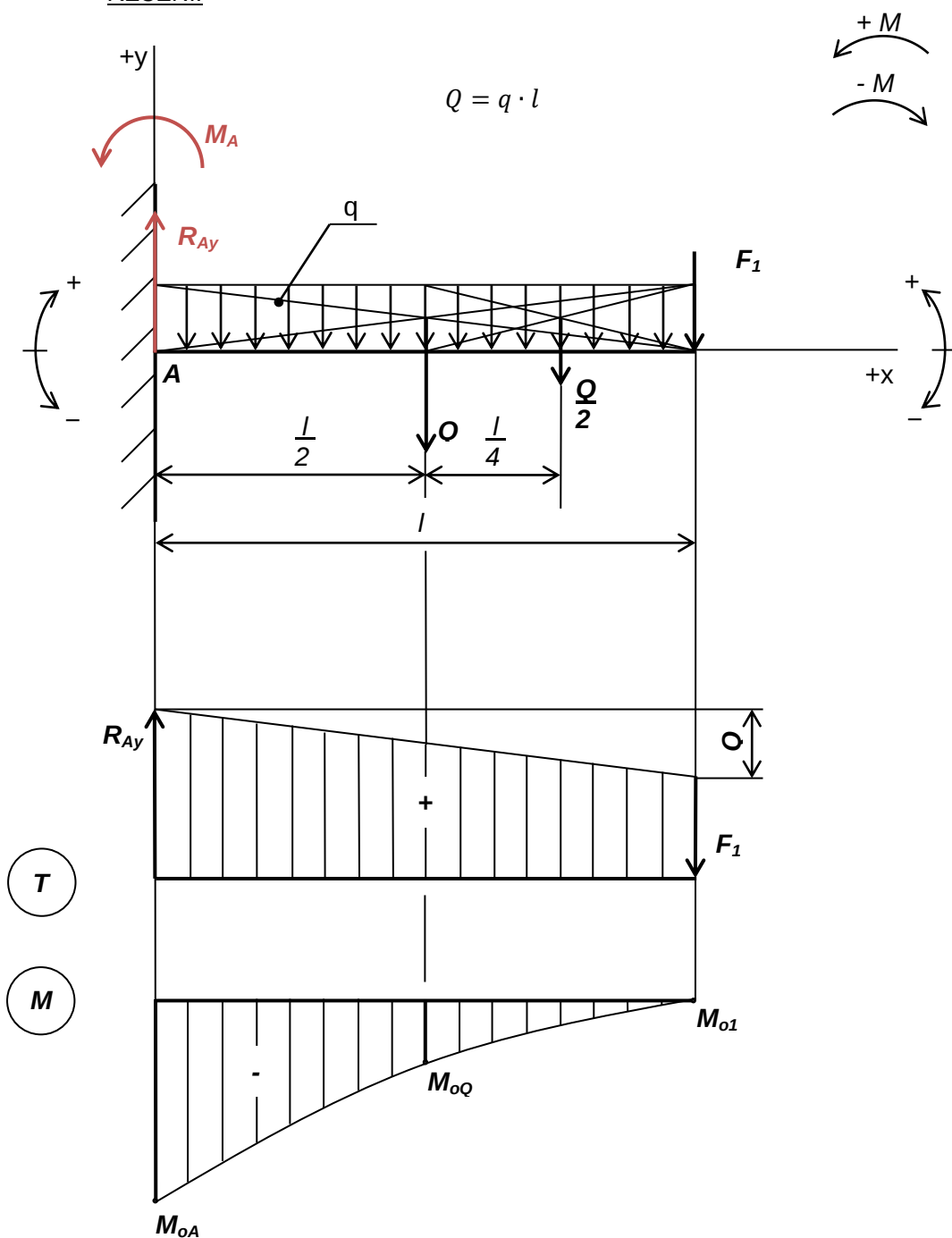
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

F) NOSNÍKY VETKNUTÉ ZATÍŽENÉ KOMBINOVANÝM ZATÍŽENÍM

ÚLOHA 1

Určete maximální ohybový moment u nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 1\,500\text{ N}$, spojitě zatížení $Q = 1\,000\text{ N}$ a vzdálenost $l = 0,4\text{ m}$. Zakreslete průběh posouvajících sil a ohybových momentů.

ŘEŠENÍ:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - Q - F_1 = 0$$

$$R_{Ay} = Q + F_1 = 1\,000 + 1\,500 = 2\,500\text{ N}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$-F_1 \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} + M_A = 0$$

$$M_A = F_1 \cdot l + Q \cdot \frac{l}{2} = 1\,500 \cdot 0,4 + 1\,000 \cdot \frac{0,4}{2} = 800\text{ Nm}$$

$$M_{o1} = 0$$

$$M_{oQ} = -F_1 \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = -1\,500 \cdot \frac{0,4}{2} - \frac{1\,000}{2} \cdot \frac{0,4}{4} = -350\text{ Nm}$$

$$M_{oA} = -F_1 \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} = -1\,500 \cdot 0,4 - 1\,000 \cdot \frac{0,4}{2} = -800\text{ Nm}$$

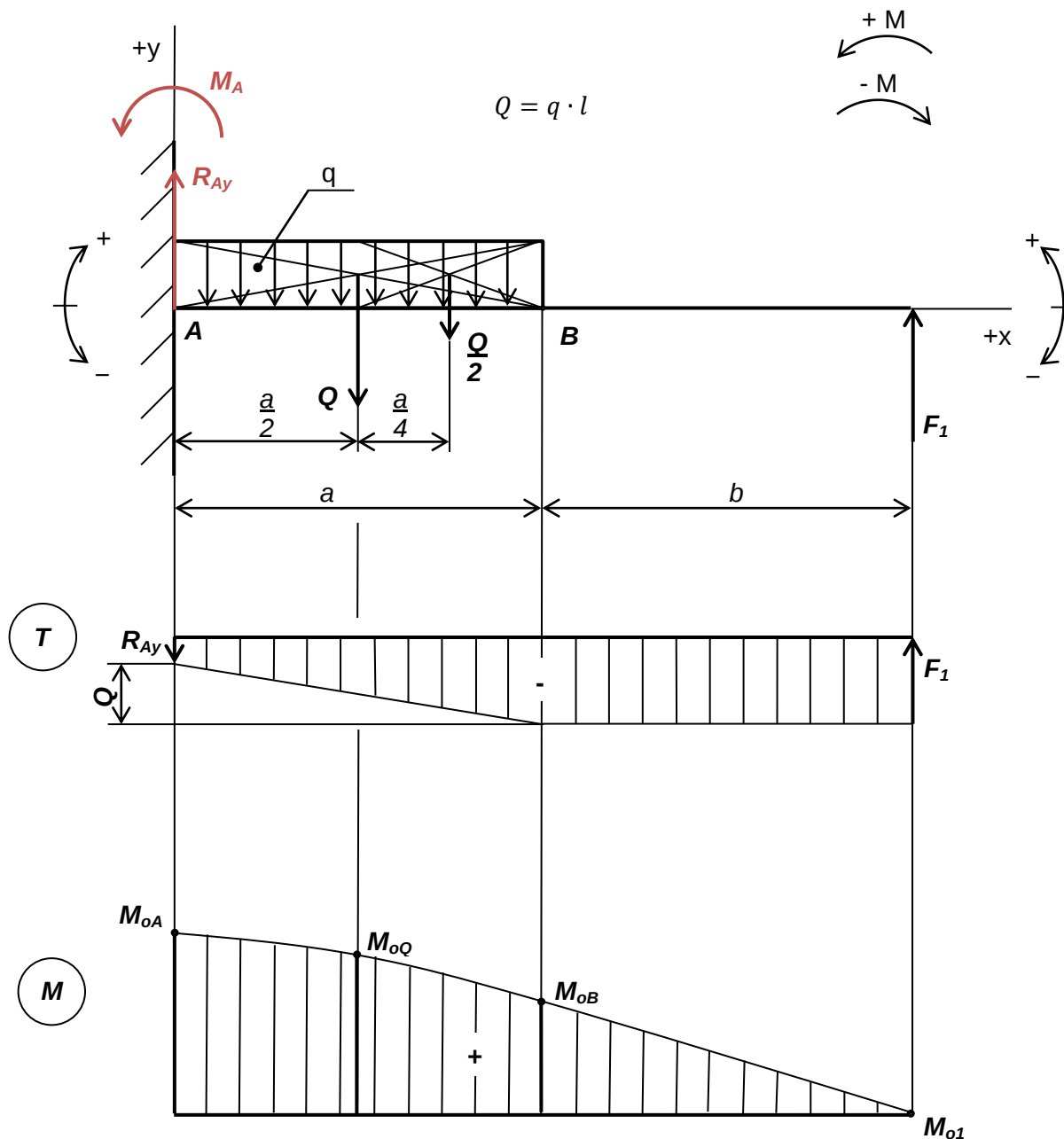
Maximální ohybový moment je M_{oA} .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 2

Určete maximální ohybový moment u nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 1\,300\text{ N}$, spojitě zatížení $Q = 1\,200\text{ N}$ a vzdálenosti $a = 0,3\text{ m}$ a $b = 0,25\text{ m}$. Zakreslete průběh posouvajících sil a ohybových momentů.

ŘEŠENÍ:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - Q + F_1 = 0$$

$$R_{Ay} = Q - F_1 = 1\,200 - 1\,300 = -100\text{ N}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0$$

$$F_1 \cdot (a + b) - Q \cdot \frac{a}{2} + M_A = 0$$

$$M_A = -F_1 \cdot (a + b) + Q \cdot \frac{a}{2} = -1\,300 \cdot (0,3 + 0,25) + 1\,200 \cdot \frac{0,3}{2} = -535\text{ Nm}$$

$$M_{o1} = 0$$

$$M_{oB} = F_1 \cdot b = 1\,300 \cdot 0,25 = 325\text{ Nm}$$

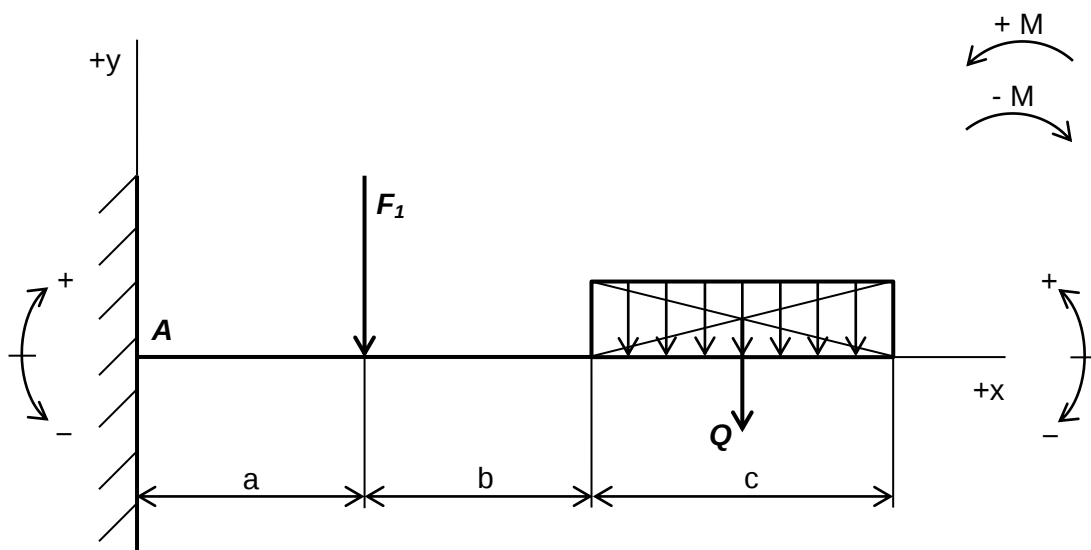
$$M_{oQ} = F_1 \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) - \frac{Q}{2} \cdot \frac{a}{4} = 1\,300 \cdot \left(0,25 + \frac{0,3}{2}\right) - \frac{1\,200}{2} \cdot \frac{0,3}{4} = 475\text{ Nm}$$

$$M_{oA} = F_1 \cdot (a + b) - Q \cdot \frac{a}{2} = 1\,300 \cdot (0,3 + 0,25) - 1\,200 \cdot \frac{0,3}{2} = 535\text{ Nm}$$

Maximální ohybový moment je M_{oA} .

ÚLOHA 3

Určete maximální ohybový moment u nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 1\,400\text{ N}$, spojitě zatížení $Q = 1\,000\text{ N}$ a vzdálenosti $a = b = 0,15$ a $c = 0,2\text{ m}$. Zakreslete průběh posouvajících sil a ohybových momentů.



Výsledek: $R_{Ay} = 2\,400\text{ N}$, $M_{o,\max} = M_A = -610\text{ Nm}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

DEFORMACE PŘI OHYBU

Přímá osa nosníku se vlivem zatížení deformuje. Zakřivená osa se nazývá **ohybová čára**. Pro potřebu praxe musíme umět zjistit **průhyb**, **úhel natočení** a **poloměr zakřivení** ohybové čáry. Při výpočtu nosníku nesmí nejen napětí překročit dovolenou hodnotu, ale i maximální průhyb musí být v předepsaných mezích. Například u ocelových konstrukcí se klade požadavek, aby průhyb nepřekročil $\left(\frac{1}{1000} \div \frac{1}{250}\right)$ rozpětí. Poloměr zakřivení ohybové čáry potřebujeme znát např. při ohýbání plechů, abychom mohli určit potřebný ohybový moment. Kromě toho potřebujeme znát průhyb nosníku i úhel natočení k řešení staticky neurčitých nosníků.

Hodnoty úhlu natočení průřezu a průhybů jsou uvedeny ve strojnických tabulkách.

A) Deformační podmínky pro vetknuté nosníky

úhel natočení průřezu:

$$\alpha = \frac{\text{plocha momentového obrazce}}{\text{tuhost v ohybu}} = \frac{S_M}{E \cdot I}.$$

Průhyb:

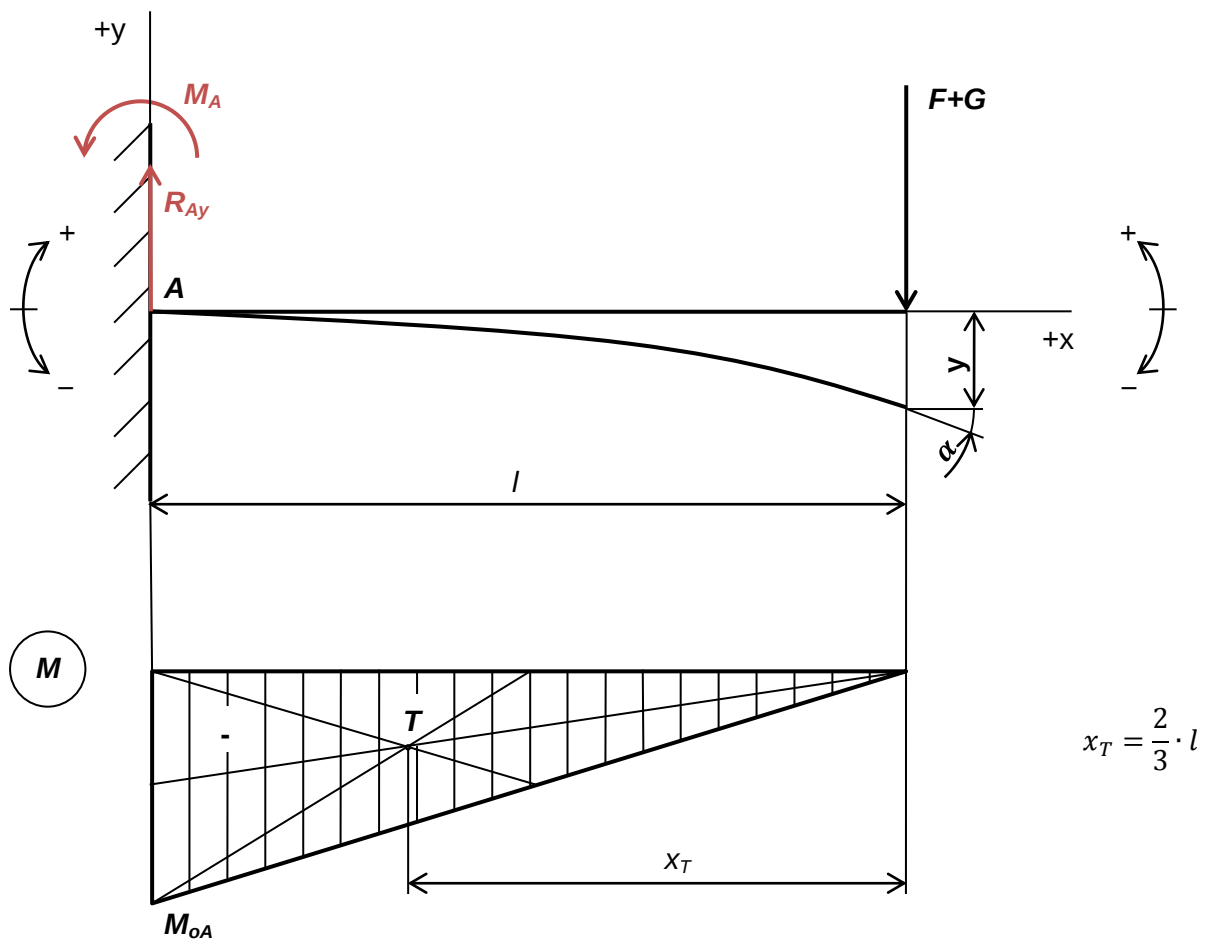
$$y = \frac{\text{lineární moment momentové plochy}}{\text{tuhost v ohybu}} = \frac{S_M \cdot x_T}{E \cdot I},$$

kde x_T je vzdálenost těžiště momentové plochy od volného konce nosníku.

ÚLOHA 1

Ocelový válcovaný nosník tvaru I , pevně vetknutý ve zdi, je na volném konci ve vzdálenosti $l = 2 \text{ m}$ od zdi zatížen elektrickým kladkostrojem o nosnosti $F = 4\,000 \text{ N}$. Vlastní tíha kladkostroje $G = 800 \text{ N}$. Navrhněte velikost profilu I pro $\sigma_{Do} = 120 \text{ MPa}$. Vypočítejte úhel natočení průřezu a průhyb na konci nosníku.

ŘEŠENÍ:



$$x_T = \frac{2}{3} \cdot l$$

$$M_{oA} = M_{o,max} = -(F + G) \cdot l = -(4\,000 + 800) \cdot 2 = -9\,600 \text{ Nm}$$

$$\sigma_o = \frac{M_{o,max}}{W_o} \leq \sigma_{Do}$$

$$W_o = \frac{M_{o,max}}{\sigma_{Do}} = \frac{|M_{oA}|}{\sigma_{Do}} = \frac{9\,600\,000}{120} = 80\,000 \text{ mm}^3$$

Vypočtené velikosti W_o odpovídá profil **I 140**, jehož $W_x = 81,9 \text{ cm}^3$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úhel natočení průřezu:

$$\alpha = \frac{S_M}{E \cdot I} = \frac{\frac{(F + G) \cdot l \cdot l}{2}}{E \cdot I} = \frac{(F + G) \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

rozměrová rovnice

$$rad = \frac{N \cdot mm^2}{MPa \cdot mm^4} = \frac{N \cdot mm^2}{N \cdot mm^{-2} \cdot mm^4} = rad = 1$$

Hodnota $I (J_x) = 573 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ je převzata ze strojnických tabulek

$$\alpha = \frac{(4\,000 + 800) \cdot 2\,000^2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 573 \cdot 10^4} = 0,007\,98 \text{ rad} = 0,457^\circ$$

Průhyb nosníku na konci:

$$y = \frac{S_M \cdot x_T}{E \cdot I} = \frac{\frac{(F + G) \cdot l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l}{E \cdot I} = \frac{(F + G) \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

rozměrová rovnice

$$mm = \frac{N \cdot mm^3}{MPa \cdot mm^4} = \frac{N \cdot mm^3}{N \cdot mm^{-2} \cdot mm^4} = mm$$

$$y = \frac{(4\,000 + 800) \cdot 2\,000^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 573 \cdot 10^4} = 10,64 \text{ mm}$$

Dovolený průhyb je $\left(\frac{1}{1\,000} \div \frac{1}{250}\right) \cdot 2\,000 = (2 \div 8) \text{ mm}$

Navržený profil **I 140** nevyhovuje deformační podmínce. Navrhujeme profil **I 160** ($I = J_x = 935 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$).

$$y = \frac{(4\,000 + 800) \cdot 2\,000^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 935 \cdot 10^4} = 6,52 \text{ mm}$$

Navržený profil **I 160** vyhovuje deformační podmínce.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 2

Ocelový válcovaný nosník tvaru **I**, pevně vetknutý ve zdi, je na volném konci ve vzdálenosti **$l = 3 \text{ m}$** od zdi zatížen elektrickým kladkostrojem o nosnosti **$F = 5\,000 \text{ N}$** . Vlastní tíha kladkostroje **$G = 1\,000 \text{ N}$** . Navrhněte velikost profilu **I** pro **$\sigma_{Do} = 120 \text{ MPa}$** . Navržený průřez musí vyhovovat i deformační podmínce. (Dovolený průhyb je $(3 \pm 12) \text{ mm}$).

Výsledek: $I\,220$; $y = 8,4 \text{ mm}$

NOSNÍKY STEJNÉHO NAPĚTÍ

Nosníkem stejného napětí nazýváme takový nosník, který pro určité zatížení má v okrajových vláknech všech průřezů stejné napětí. Při minimální spotřebě materiálu má maximální deformaci a má také nejlepší součinitel využití materiálu. Nosník stejného napětí musí splňovat podmínku

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \text{konst.}$$

Proto jsou průřezové moduly v ohybu u jednotlivých průřezech přímo úměrné ohybovým momentům v těchto průřezích.

Výpočet nosníku stejného napětí je uveden ve strojnických tabulkách.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] MRŇÁK, L. a DRDLA, A. Mechanika pružnost a pevnost pro SPŠ strojnické. 3. opravené vyd. Praha: SNTL, 1980. 366 s.

[2] SKÁLA, V. a STEJSKAL, V. Mechanika pro SPŠ nestrojnické. 3. vyd. Praha: SNTL, 1986. 207 s.

[3] LEINVEBER, J., VÁVRA, P. Strojnické tabulky: Pomocná učebnice pro školy technického zaměření. Čtvrté doplněné vydání. Úvaly: Albra, 2008, 914 s. ISBN 978-80-7361-051-7.