



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MECHANIKA	PRVNÍ	ŠČERBOVÁ M. PAVELKA V.	15. ZÁŘÍ 2012
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
NOSNÍKY			

A) NOSNÍKY ZATÍŽENÉ OBECNOU SOUSTAVOU SIL

Obecný postup při matematickém řešení reakcí (**vazbových sil**) v podporách nosníku:

- 1) Nakreslíme grafické schéma nosníku se zatěžujícími silami.
- 2) Rozhodneme, která podpora je posuvná či rotační.
- 3) Souřadnicový systém volíme tak, aby jeho počátek byl totožný s podporou **A** nebo **B** a osa **x** totožná s nosníkem.
- 4) Všechny zatěžující síly v obecném směru rozložíme na **x**-ové a **y**-ové složky.
- 5) Nosník uvolníme tím způsobem, že v posuvné podpoře zakreslíme vazbovou sílu působící ve směru kladné osy **y** a v rotační podpoře dvě složky vazbové síly a to v kladném směru působení obou os.
- 6) Složky sil určíme z pravoúhlých trojúhelníků.
- 7) Sestavíme rovnice ze statických podmínek obecné rovnováhy:

- a) algebraický součet všech sil působících ve směru osy **x** se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

- b) algebraický součet všech sil působících ve směru osy **y** se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

- c) algebraický součet momentů všech sil k momentovému bodu se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

Momentový bod volíme **vždy** v jedné podpoře.

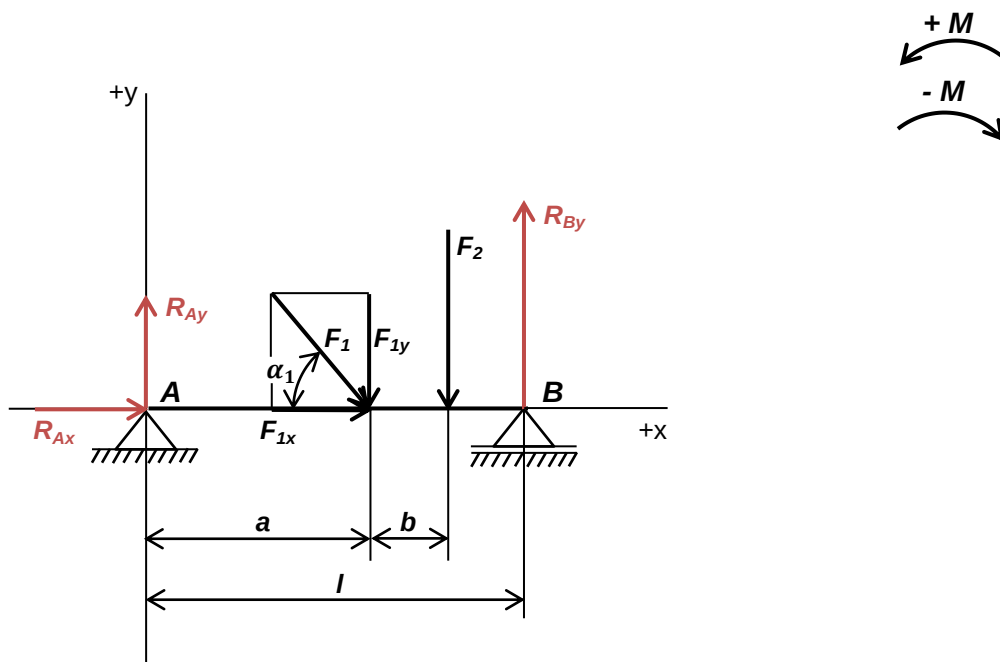
- 8) Řešením statických podmínek rovnováhy vypočteme hledané vazbové síly. Znaménko u výsledku určuje skutečný směr působení vazbových sil.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 1

Určete velikost a směr působení vazbových sil u nosníku na dvou podporách, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 1000 \text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_1 = 50^\circ$, velikost zatěžující síly $F_2 = 1200 \text{ N}$ a vzdálenosti $a = 0,3 \text{ m}$, $b = 0,1 \text{ m}$ a $l = 0,5 \text{ m}$.

ŘEŠENÍ:



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 1000 \cdot \cos 50^\circ = 642,8 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 1000 \cdot \sin 50^\circ = 766 \text{ N}$$

Vazbovou sílu R_{Ax} určíme z algebraického součtu všech sil působících ve směru osy x , který se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$R_{Ax} + F_{1x} = 0$$

$$R_{Ax} = -F_{1x}$$

$$R_{Ax} = \underline{\underline{-642,8 \text{ N}}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vazbovou sílu R_{By} určíme z momentové podmínky rovnováhy k bodu **A**:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$R_{By} \cdot l - F_2 \cdot (a + b) - F_{1y} \cdot a = 0$$

$$R_{By} = \frac{F_2 \cdot (a + b) + F_{1y} \cdot a}{l} = \frac{1200 \cdot (0,3 + 0,1) + 766 \cdot 0,3}{0,5} = \underline{1\,419,6\text{ N}}$$

Vazbovou sílu R_{Ay} určíme z algebraického součtu všech sil působících ve směru osy **y**, který se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

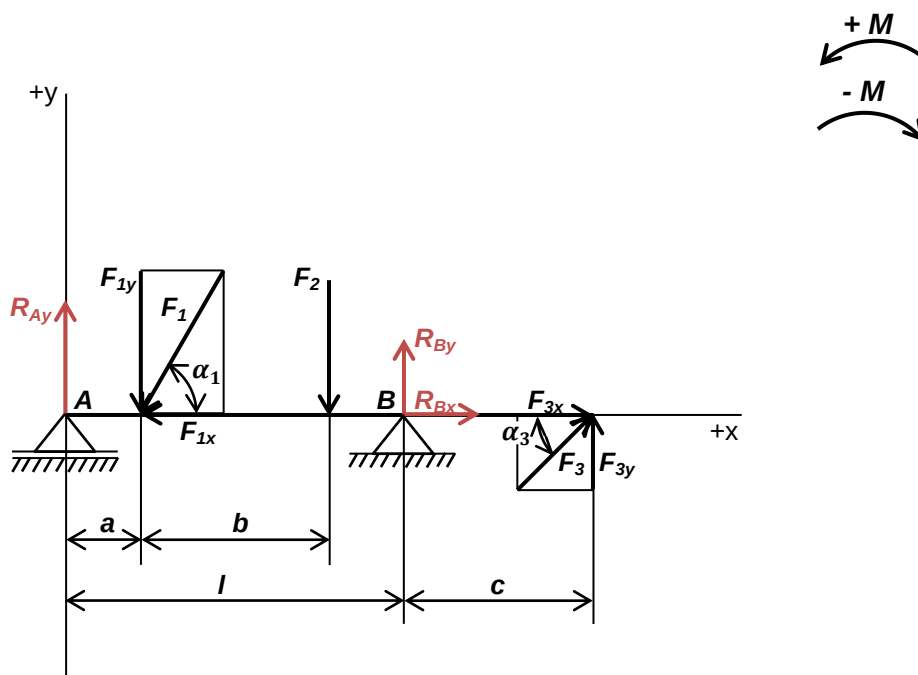
$$R_{Ay} - F_{1y} - F_2 + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} = F_{1y} + F_2 - R_{By} = 766 + 1200 - 1419,6 = \underline{546,4\text{ N}}$$

ÚLOHA 2

Určete velikost a směr působení vazbových sil u nosníku na dvou podporách, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 1100\text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_1 = 60^\circ$, velikost zatěžující síly $F_2 = 900\text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_3 = 700\text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_3 = 45^\circ$ a vzdálenosti $a = 0,1\text{ m}$, $b = c = 0,25\text{ m}$ a $l = 0,45\text{ m}$.

ŘEŠENÍ:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 1100 \cdot \cos 60^\circ = 550 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 1100 \cdot \sin 60^\circ = 952,6 \text{ N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 700 \cdot \cos 45^\circ = 495 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 700 \cdot \sin 45^\circ = 495 \text{ N}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$-F_{1x} + F_{3x} + R_{Bx} = 0$$

$$R_{Bx} = F_{1x} - F_{3x} = 550 - 495 = 55 \text{ N}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$-F_{1y} \cdot a - F_2 \cdot (a + b) + R_{By} \cdot l + F_{3y} \cdot (l + c) = 0$$

$$R_{By} = \frac{F_{1y} \cdot a + F_2 \cdot (a + b) - F_{3y} \cdot (l + c)}{l} =$$

$$= \frac{952,6 \cdot 0,1 + 900 \cdot (0,1 + 0,25) - 495 \cdot (0,45 + 0,25)}{0,45} = 141,7 \text{ N}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - F_{1y} - F_2 + R_{By} + F_{3y} = 0$$

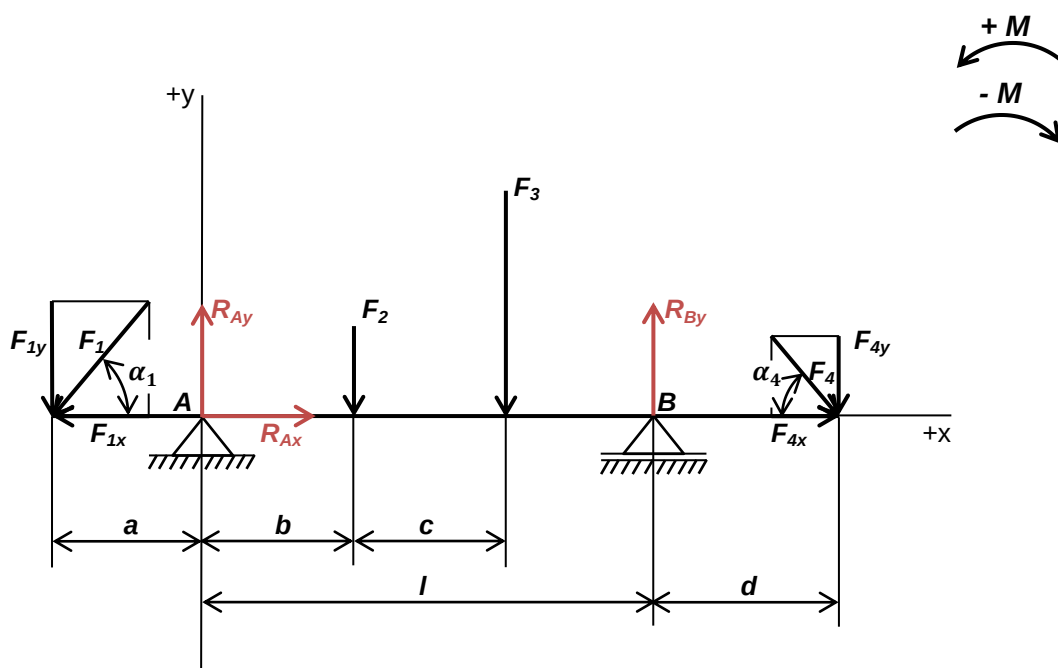
$$R_{Ay} = F_{1y} + F_2 - R_{By} - F_{3y} = 952,6 + 900 - 141,7 - 495 = 1\,215,9 \text{ N}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 3

Určete velikost a směr působení vazbových sil u nosníku na dvou podporách, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 1000 \text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_1 = 50^\circ$, velikost zatěžující síly $F_2 = 600 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_3 = 1500 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_4 = 700 \text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_4 = 40^\circ$ a vzdálenosti $a = b = c = 0,1 \text{ m}$, $l = 0,3 \text{ m}$ a $d = 0,2 \text{ m}$.

ŘEŠENÍ:



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 1000 \cdot \cos 50^\circ = \underline{642,8 \text{ N}}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 1000 \cdot \sin 50^\circ = \underline{766 \text{ N}}$$

$$F_{4x} = F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 700 \cdot \cos 40^\circ = \underline{536,2 \text{ N}}$$

$$F_{4y} = F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 700 \cdot \sin 40^\circ = \underline{450 \text{ N}}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$-F_{1x} + R_{Ax} + F_{4x} = 0$$

$$R_{Ax} = F_{1x} - F_{4x} = 642,8 - 536,2 = \underline{106,6 \text{ N}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$F_{1y} \cdot a - F_2 \cdot b - F_3 \cdot (b + c) + R_{By} \cdot l - F_4 \cdot (l + d) = 0$$

$$R_{By} = \frac{-F_{1y} \cdot a + F_2 \cdot b + F_3 \cdot (b + c) - F_4 \cdot (l + d)}{1} =$$

$$= \frac{-766 \cdot 0,1 + 600 \cdot 0,1 + 1500 \cdot (0,1 + 0,1) + 450 \cdot (0,3 + 0,2)}{0,3} = \underline{1\,694,7\text{ N}}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

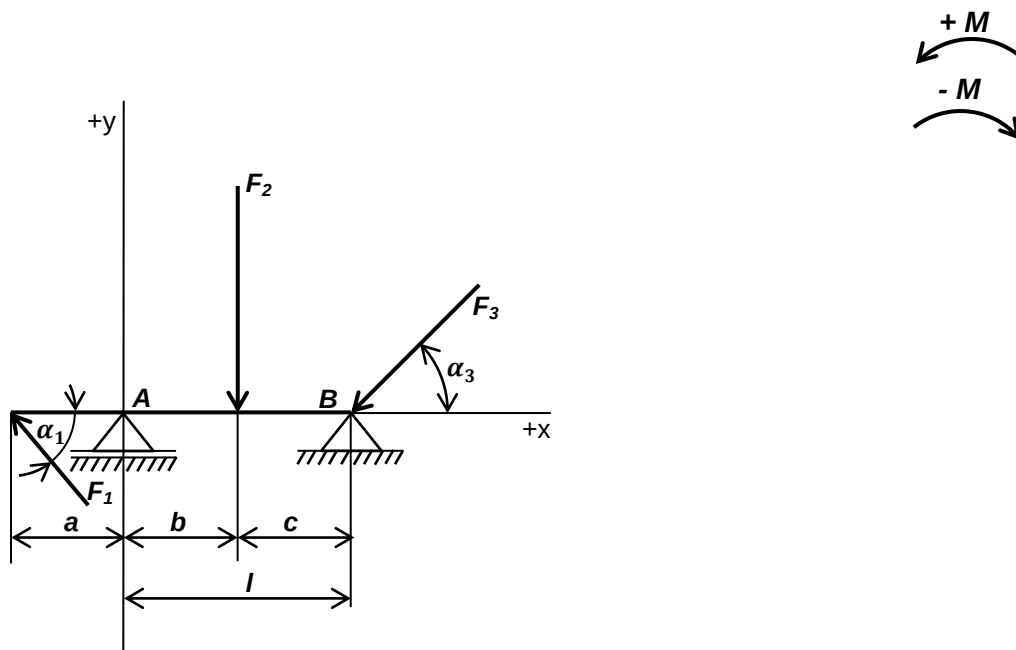
$$-F_{1y} + R_{Ay} - F_2 - F_3 + R_{By} - F_{4y} = 0$$

$$R_{Ay} = F_{1y} + F_2 + F_3 - R_{By} + F_{4y} = 766 + 600 + 1500 - 1694,7 + 450 =$$

$$= \underline{1\,621,3\text{ N}}$$

ÚLOHA 4

Určete velikost a směr působení vazbových sil u nosníku na dvou podporách, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 800\text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_1 = 50^\circ$, velikost zatěžující síly $F_2 = 1500\text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_3 = 1200\text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_3 = 45^\circ$ a vzdálenosti $a = b = 0,15\text{ m}$, $c = 0,1\text{ m}$ a $l = 0,4\text{ m}$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výsledek: $R_{Ay} = 413,1 \text{ N}$, $R_{By} = 1322,6 \text{ N}$, $R_{Bx} = 1362,7 \text{ N}$

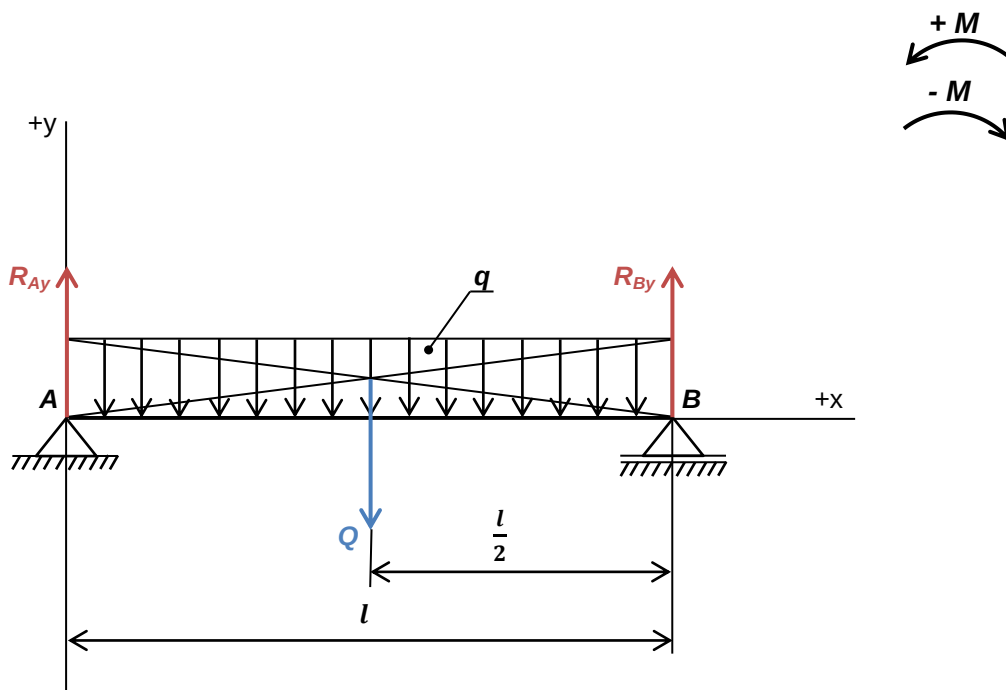
B) NOSNÍKY ZATÍŽENÉ SPOJITÝM BŘEMENEM

Spojitě zatížení je definováno jako síla Q působící na jednotku délky nosníku l .

$$q = \frac{Q}{l}$$

V praxi se jedná o zatížení vlastní tíhou nosníku, otlacení u delšího náboje, odstředivou silou, větrem, sněhem, námrazou, hydrostatickým tlakem vody atd.

Spojitě zatížení bývá rovnoměrně rozložené nebo nerovnoměrně rozložené.



$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$R_{By} \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$R_{By} = \frac{Q \cdot \frac{l}{2}}{l} = \frac{Q}{2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - Q + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} = Q - R_{By} = Q - \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2}$$

URČENÍ VAZBOVÝCH ÚČINKŮ U NOSNÍKŮ VETKNUTÝCH

Nosníky vetknuté jsou uloženy staticky určitě pouze tehdy, jsou-li uchyceny pouze v jednom vetknutí.

A) NOSNÍKY ZATÍŽENÉ SOUSTAVOU ROVNOBĚŽNÝCH SIL

Obecný postup při matematickém řešení vazbových účinků u nosníků vetknutých:

- 1) Nakreslíme grafické schéma nosníku se zatěžujícími silami.
- 2) Souřadnicový systém volíme tak, aby jeho počátek byl totožný s bodem vetknutí **A**, osa **x** totožná s nosníkem a osa **y** rovnoběžná se směrem zatěžujících sil.
- 3) Nosník uvolníme tím způsobem, že v místě vetknutí zakreslíme vazbovou sílu působící ve směru kladné osy **y** a moment vetknutí.
- 4) Sestavíme rovnice ze statických podmínek obecné rovnováhy:
 - a) algebraický součet všech sil působících ve směru osy **x** se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

Jsou-li všechny síly rovnoběžné s osou **y**, potom ve směru osy **x** nemůže působit žádná síla, a proto statická podmínka rovnováhy ve směru osy **x** se v tomto případě neuplatní.

- b) algebraický součet všech sil působících ve směru osy **y** se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

- c) algebraický součet momentů všech sil včetně momentu vetknutí k momentovému bodu se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

Momentový bod volíme ve vetknutí.

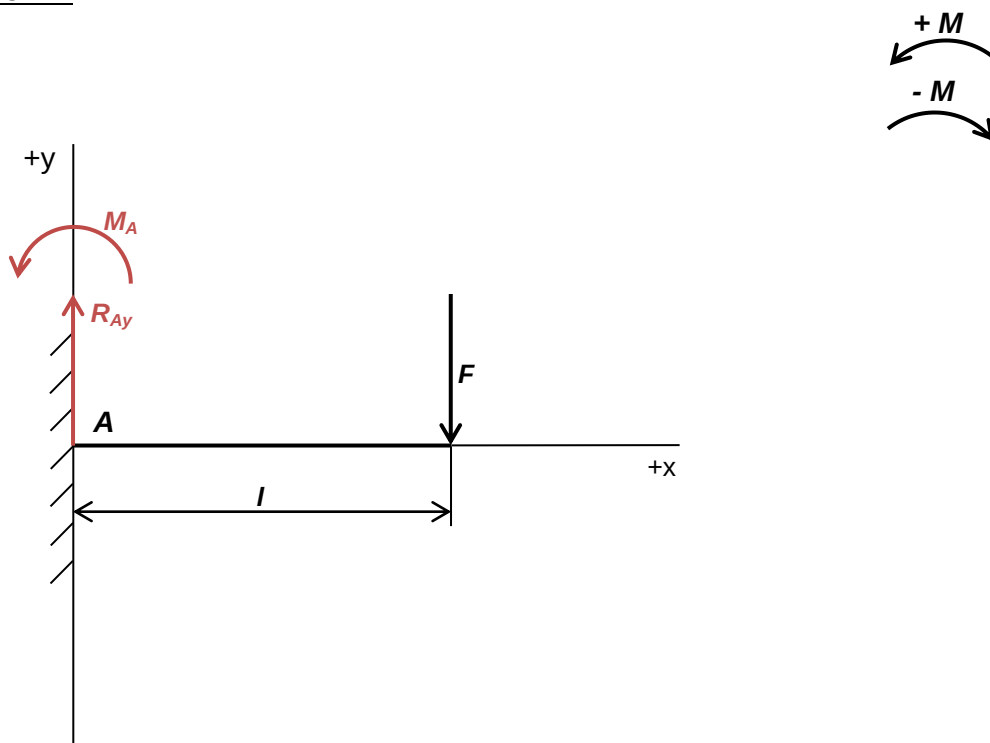
- 5) Řešením statických podmínek rovnováhy vypočteme neznámé vazbové účinky. Znaménko u výsledku určuje skutečný směr působení vazbových účinků.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 1

Určete velikost a směr působení vazbových účinků u vetknutého nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F = 1000 \text{ N}$ a vzdálenost $l = 0,5 \text{ m}$.

ŘEŠENÍ:



Vazbovou sílu R_{Ay} určíme z algebraického součtu všech sil působících ve směru osy y , který se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - F = 0$$

$$R_{Ay} = F = \underline{1000 \text{ N}}$$

Moment vetknutí určíme z momentové podmínky rovnováhy k bodu A :

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$-F \cdot l + M_A = 0$$

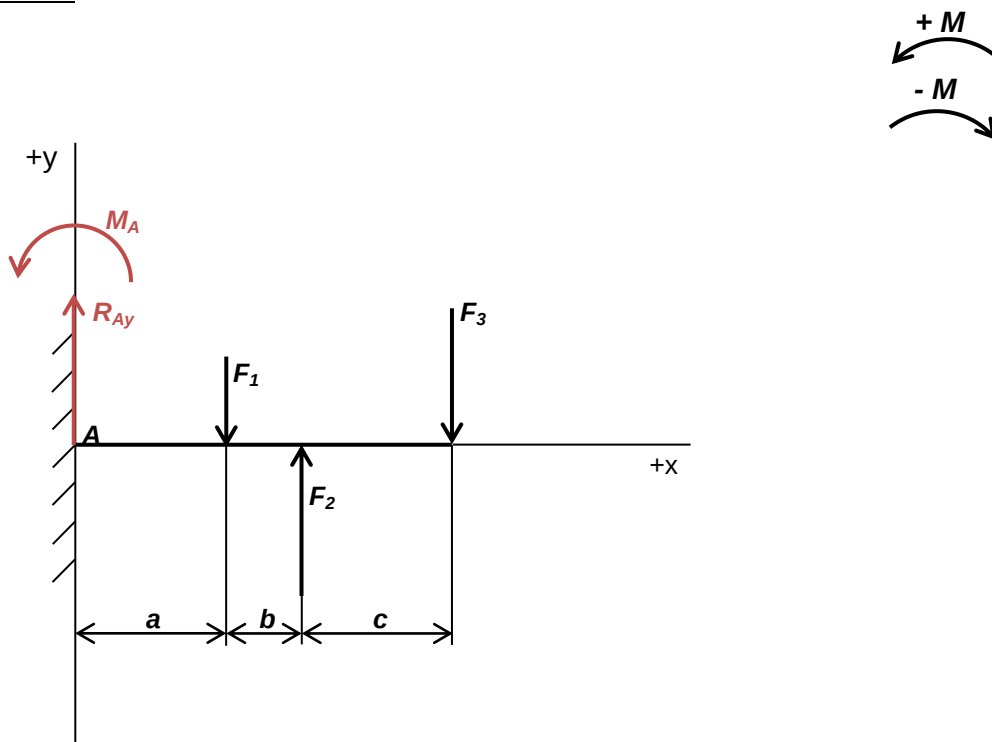
$$M_A = F \cdot l = 1000 \cdot 0,5 = \underline{500 \text{ Nm}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 2

Určete velikost a směr působení vazbových účinků u vetknutého nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 600 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_2 = 1000 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_3 = 900 \text{ N}$ a vzdálenosti $a = c = 0,2 \text{ m}$ a $b = 0,1 \text{ m}$.

ŘEŠENÍ:



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$$R_{Ay} = F_1 - F_2 + F_3 = 600 - 1000 + 900 = \underline{500 \text{ N}}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$-F_3 \cdot (a + b + c) + F_2 \cdot (a + b) - F_1 \cdot a + M_A = 0$$

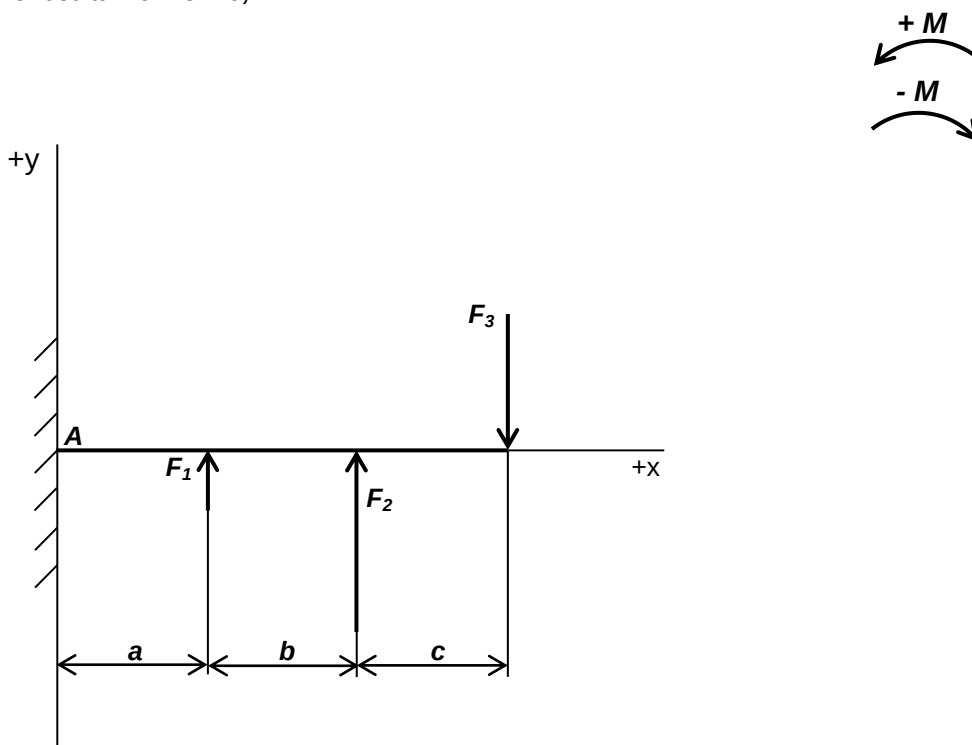
$$M_A = F_3 \cdot (a + b + c) - F_2 \cdot (a + b) + F_1 \cdot a =$$

$$= 900 \cdot (0,2 + 0,1 + 0,2) - 1000 \cdot (0,2 + 0,1) + 600 \cdot 0,2 = \underline{270 \text{ Nm}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 3

Určete velikost a směr působení vazbových účinků u vetknutého nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 400 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_2 = 1200 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_3 = 600 \text{ N}$ a vzdálenosti $a = b = c = 0,2 \text{ m}$.



Výsledek: $R_{Ay} = -1000 \text{ N}$, $M_A = -200 \text{ Nm}$

B) NOSNÍKY ZATÍŽENÉ OBECNOU SOUSTAVOU SIL

Obečný postup při matematickém řešení vazbových účinků u nosníků vetknutých:

- 1) Nakreslíme grafické schéma nosníku se zatěžujícími silami.
- 2) Souřadnicový systém volíme tak, aby jeho počátek byl totožný s bodem vetknutí **A** a osa **x** totožná s nosníkem.
- 3) Všechny zatěžující síly v obecném směru rozložíme na x-ové a y-ové složky.
- 4) Nosník uvolníme tím způsobem, že v místě vetknutí zakreslíme dvě složky vazbové síly kladném směru obou os a moment vetknutí.
- 5) Složky sil určíme z pravoúhlých trojúhelníků.
- 6) Sestavíme rovnice ze statických podmínek obecné rovnováhy:
 - a) algebraický součet všech sil působících ve směru osy **x** se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- b) algebraický součet všech sil působících ve směru osy y se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

- c) algebraický součet momentů všech sil včetně momentu vetknutí k momentovému bodu se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

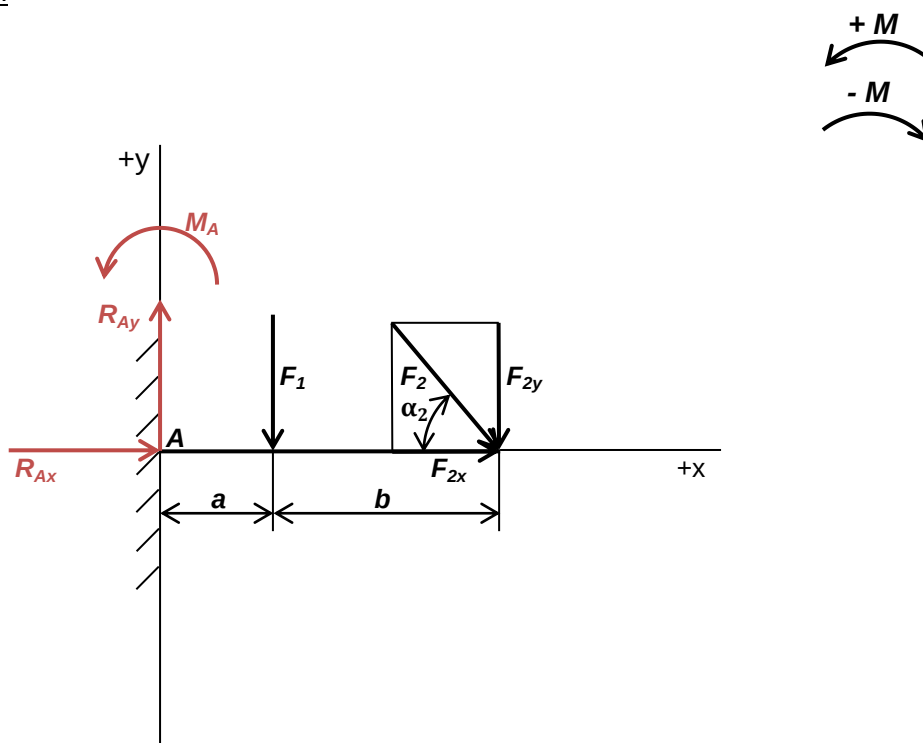
Momentový bod volíme ve vetknutí.

- 7) Řešením statických podmínek rovnováhy vypočteme neznámé vazbové účinky. Znaménko u výsledku určuje skutečný směr působení vazbových účinků.

ÚLOHA 1

Určete velikost a směr působení vazbových účinků u vetknutého nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 900 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_2 = 1100 \text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_2 = 50^\circ$ a vzdálenosti $a = 0,15 \text{ m}$ a $b = 0,3 \text{ m}$.

ŘEŠENÍ:



$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 1100 \cdot \cos 50^\circ = 707,1 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 1100 \cdot \sin 50^\circ = 842,7 \text{ N}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vazbovou sílu R_{Ax} určíme z algebraického součtu všech sil působících ve směru osy x , který se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$R_{Ax} + F_{2x} = 0$$

$$R_{Ax} = -F_{2x} = \underline{\underline{-707,1 \text{ N}}}$$

Vazbovou sílu R_{Ay} určíme z algebraického součtu všech sil působících ve směru osy y , který se rovná nule:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - F_1 - F_{2y} = 0$$

$$R_{Ay} = F_1 + F_{2y} = 900 + 842,7 = \underline{\underline{1742,7 \text{ N}}}$$

Moment vetknutí určíme z momentové podmínky rovnováhy k bodu A :

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$-F_{2y} \cdot (a + b) - F_1 \cdot a + M_A = 0$$

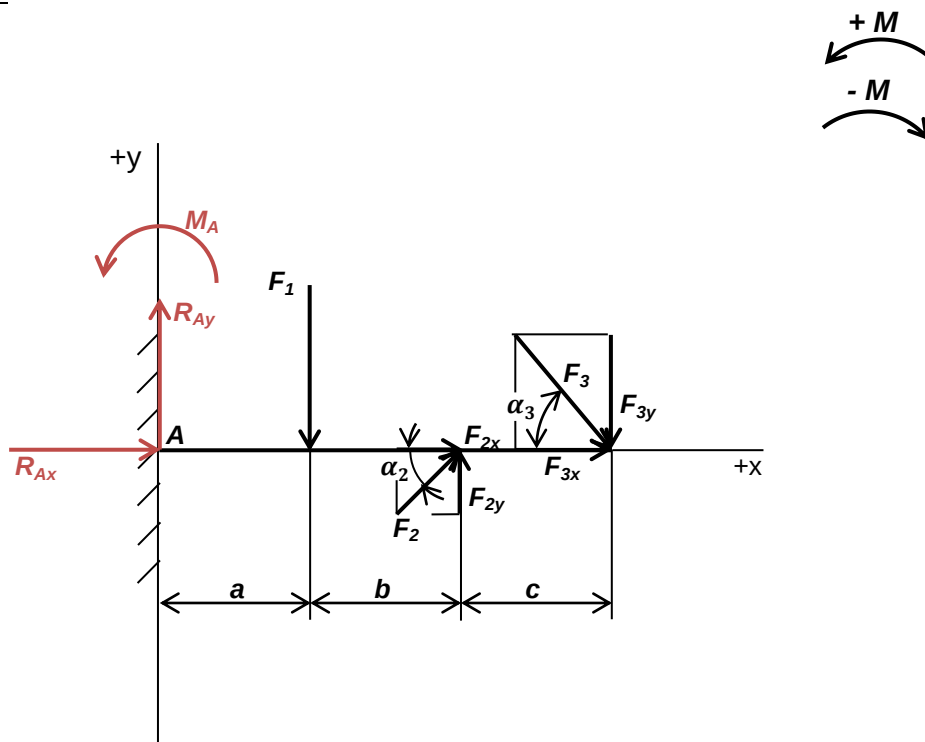
$$M_A = F_{2y} \cdot (a + b) + F_1 \cdot a = 842,7 \cdot (0,15 + 0,3) + 900 \cdot 0,15 = \underline{\underline{514,215 \text{ Nm}}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA 2

Určete velikost a směr působení vazbových účinků u vetknutého nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 1100 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_2 = 600 \text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_2 = 45^\circ$, velikost zatěžující síly $F_3 = 1000 \text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_3 = 50^\circ$ a vzdálenosti $a = b = c = 0,2 \text{ m}$.

ŘEŠENÍ:



$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 600 \cdot \cos 45^\circ = 424,3 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 600 \cdot \sin 45^\circ = 424,3 \text{ N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 1000 \cdot \cos 50^\circ = 642,8 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 1000 \cdot \sin 50^\circ = 766,1 \text{ N}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$R_{Ax} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$

$$R_{Ax} = -F_{2x} - F_{3x} = -424,3 - 642,8 = \underline{\underline{-1067,1 \text{ N}}}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - F_1 + F_{2y} - F_{3y} = 0$$

$$R_{Ay} = F_1 - F_{2y} + F_{3y} = 1100 - 424,3 + 766,1 = \underline{1441,8 \text{ N}}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

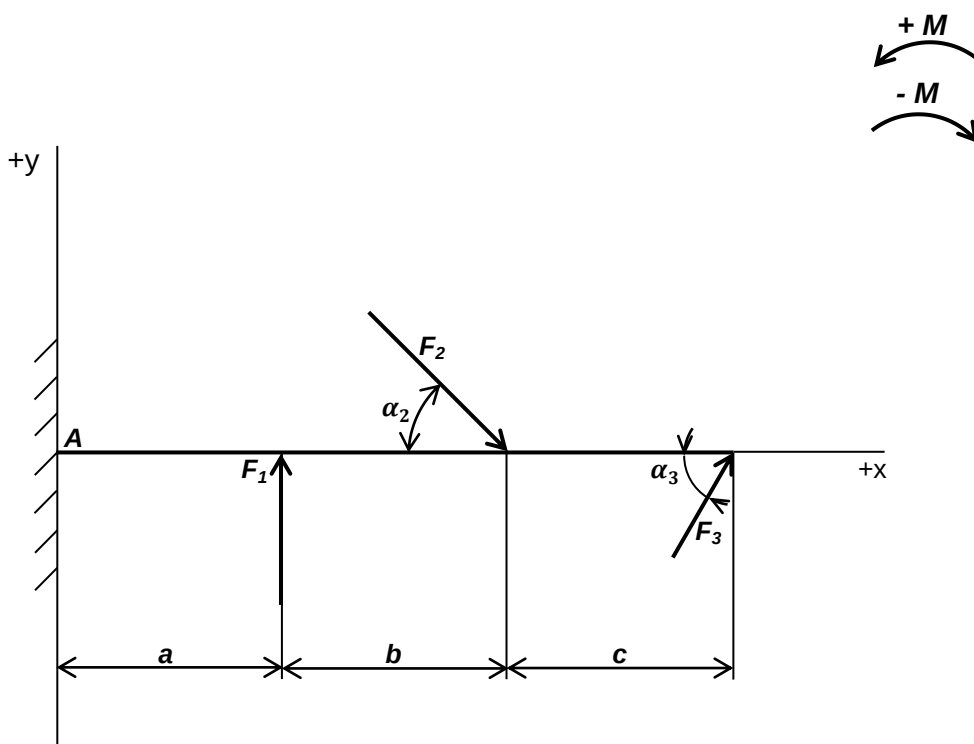
$$-F_{3y} \cdot (a + b + c) + F_{2y} \cdot (a + b) - F_1 \cdot a + M_A = 0$$

$$M_A = F_{3y} \cdot (a + b + c) - F_{2y} \cdot (a + b) + F_1 \cdot a =$$

$$= 766,1 \cdot (0,2 + 0,2 + 0,2) - 424,3 \cdot (0,2 + 0,2) + 1100 \cdot 0,2 = \underline{509,94 \text{ Nm}}$$

ÚLOHA 3

Určete velikost a směr působení vazbových účinků u vetknutého nosníku, je-li velikost zatěžující síly $F_1 = 1000 \text{ N}$, velikost zatěžující síly $F_2 = 1300 \text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_2 = 45^\circ$, velikost zatěžující síly $F_3 = 800 \text{ N}$ působící pod úhlem $\alpha_3 = 60^\circ$, a vzdálenosti $a = b = c = 0,2 \text{ m}$.



Výsledek: $R_{Ax} = -1\,319,2 \text{ N}$, $R_{Ay} = -773,6 \text{ N}$, $M_A = -248 \text{ Nm}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

POUŽITÁ LITERATURA

[1] SKÁLA, V. a STEJSKAL, V. Mechanika pro SPŠ nestrojnické. 3. vyd. Praha: SNTL, 1986. 207 s.

[2] SALABA, S. a MATĚNA, A. Mechanika I statika pro SPŠ strojnické. 1. vyd. Praha: SNTL, 1978. 138 s.