

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<i>Předmět:</i>	<i>Ročník:</i>	<i>Vytvořil:</i>	<i>Datum:</i>
MATEMATIKA	DRUHÝ	MGR. JÜTTNEROVÁ	24. 6. 2012
<i>Název zpracovaného celku:</i>			
FUNKCE, VLASTNOSTI FUNKCE			

FUNKCE

Pojem funkce:

Funkcí na množině $M \subset R$ se nazývá předpis, kterým je každému prvku x z množiny M přiřazeno **právě jedno** reálné číslo y tak, že $[x; y] \in f$.

Poznámka: Pro $y \in R$ zavádíme označení $y = f(x) \Rightarrow [x; f(x)] \in f$

Zápis funkce: $y = f(x)$

Čteme: „**Hodnota funkce v bodě x (funkční hodnota) je rovna y** “.

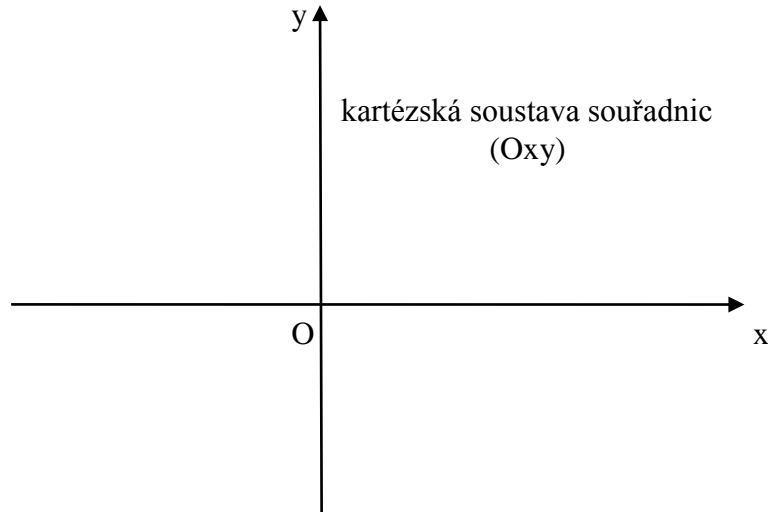
Definiční obor a obor hodnot funkce:

- Množinu M (**množinu všech x** , k nimž je přiřazeno **právě jediné y**) nazýváme **definiční obor** funkce f a značíme **$D(f)$** .
Definiční obor je zobrazen na ose x .
 - **Množinu všech y** , ke kterým existuje aspoň jedno $x \in D(f)$ tak, že $y \in f(x)$, se nazývá **obor hodnot** funkce a značí se **$H(f)$** .
Obor hodnot je zobrazen na ose y .
- Množinu všech $y \in R$, ke kterým existuje aspoň jedno $x \in D(f)$ tak, že $y = f(x)$, se nazývá **obor hodnot** funkce a značí se **$H(f)$** .
- Číslo **$f(x_0)$** nazýváme **hodnota funkce f** (funkční hodnota) **v bodě x_0** .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Graf funkce:

- Graf funkce – ve zvolené soustavě souřadnic O_{xy} je množina všech bodů roviny, kde $x \in D(f)$.



Způsoby zadání funkce:

- Funkce je zadána, známe-li její $D(f)$ a funkční předpis $y = f(x)$.
- Funkční předpis může být určen:
- **rovnicí**
 - **tabulkou (výčtem hodnot)**
 - **grafem**
 - **slovním předpisem**

Příklady funkčních předpisů určených:

a) rovnicí:

$$f : y = \sqrt{x}$$

- definiční obor funkce: $D(f) = R_0^+$
- funkční hodnoty funkce v bodech 0: $f(0) = \sqrt{0} = 0$
1: $f(1) = \sqrt{1} = 1$
4: $f(4) = \sqrt{4} = 2$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

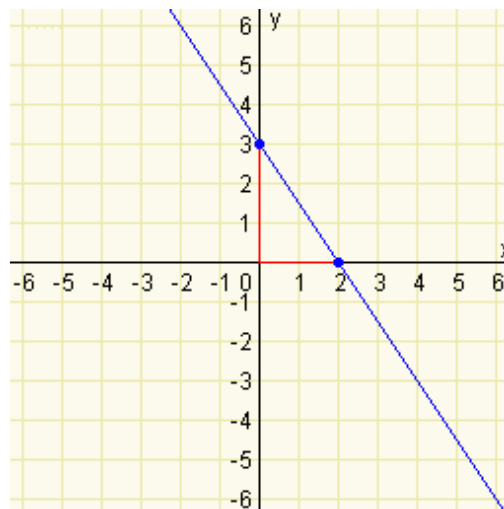
b) tabulkou:

m:

x	10	0	-1
y	7	2	2

- funkce je dána výčtem prvků, můžeme ji zapsat pomocí množiny všech uspořádaných dvojic:
 $m = \{[10;7], [0;2], [-1;2]\}$
- definiční obor funkce: $D(m) = \{10;0;-1\}$,
- obor hodnot funkce: $H(m) = \{7;2;\}$

c) grafem:



Zdroj obr: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/>

- definiční obor funkce: $D(f) = R$ (čteme na ose x)
- obor hodnot funkce: $H(f) = R$ (čteme na ose y)

d) slovním předpisem:

„Dráha je přímo-úměrná rychlosti“.

„Předpis funkce f přiřazuje každé z hodnot definičního oboru její druhou mocninu“.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 1 – FUNKCE

Příklad 1

Určete definiční obory a obory hodnot funkcí:

a) $g_1 : \left\{ [-3;0], [6;8], [-2;-1], [5;7] \right\}$

b) $g_2 : \left\{ [1,4;\sqrt{6}], [2;3], [9;0,8], [-4;-4] \right\}$

c) $g_3 : \left\{ [-7;0], [6;3], [1;5], [-1;1] \right\}$

d) $g_4 : \left\{ [0;0], [5;5], [4;1], [7;16], [11;0], [15;81] \right\}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 2 - FUNKCE

Příklad 2

Je dána funkce $f : y = -2 \cdot (x + 1); x \in \mathbb{R}^+$.

a) Určete aspoň pět uspořádaných dvojic, které patří funkci f .

b) Určete $f(1); f(2,4); f(18)$.

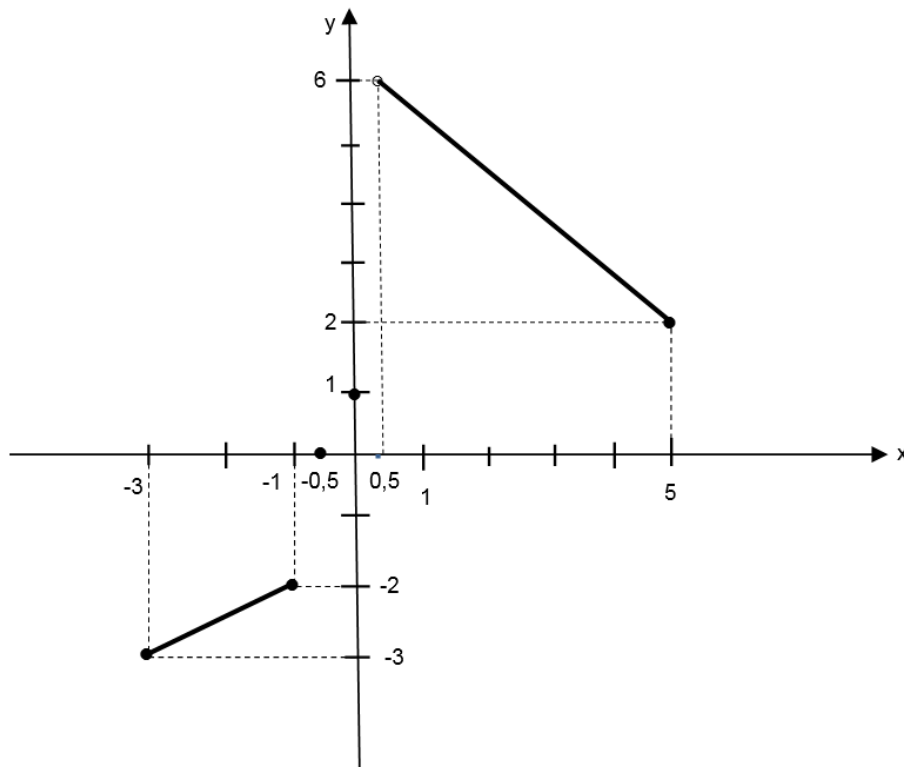
c) Rozhodněte, které z následujících uspořádaných dvojic patří funkci f :
 $[5; -12], [9; -20], [3; -6], [0; -2]$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 3 - FUNKCE

Příklad 3

Zapište definiční obor a obor hodnot funkce určené grafem:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 4 - FUNKCE

Příklad 4

Určete definiční obor funkce $f : y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

Příklad 5

Určete definiční obor a obor hodnot funkce

a) $f : y = \sqrt{\frac{x-4}{x+5}}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 5 - FUNKCE

b) $g : y = \frac{2}{x^2 + 1}$

Příklad 6

Určete funkční hodnotu funkce $f : y = 2x^2 + 3x + 1$ v bodech **a; 1; -3**.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRACOVNÍ LIST 6 - FUNKCE

Příklady na procvičení

1. Určete definiční obory funkcí:

$$f_1 : y = \frac{1}{x}$$

$$f_2 : y = x^2 + 2$$

$$f_3 : y = |x|$$

$$f_4 : y = \sqrt{1-|x|}$$

$$f_5 : y = \sqrt{\frac{2-x}{x-3}}$$

$$f_6 : y = \frac{3}{(x-3) \cdot (x+5)}$$

$$f_7 : y = \sqrt{\frac{x-3}{3-x}}$$

$$f_8 : y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$$

$$f_9 : y = \frac{1}{1-|x|}$$

$$f_{10} : y = \frac{1}{|x|-x}$$

2. Určete definiční obory a obory hodnot funkcí:

$$f_1 : y = 5x$$

$$f_2 : y = \frac{1}{x^2 - 16}$$

$$f_3 : y = \frac{x+4}{x-3}$$

$$f_4 : y = \sqrt{3-4x}$$

$$f_5 : y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f_6 : y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$$

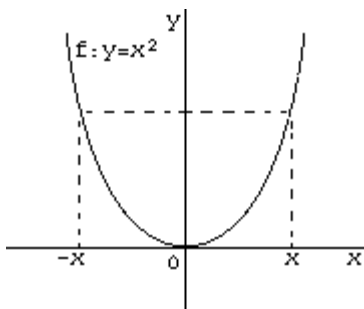
3. Je dána funkce $v : y = 2 \cdot (x - 7)$; $x \in \langle 2; 20 \rangle$. Zjistěte, které z čísel 51; -30; 9 patří do oboru hodnot funkce v .

Vlastnosti funkcí:

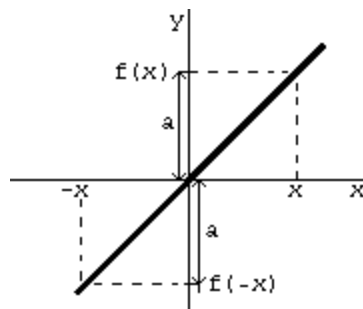
I. Funkce sudá a lichá:

- Necht' f je funkce, pro niž platí: jestliže $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$.
- Funkce f je sudá, právě tehdy, když pro každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = f(x)$.
- Funkce f je lichá, právě tehdy, když pro každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = -f(x)$.
- **Graf sudé funkce** je souměrný podle osy y .
- **Graf liché funkce** je souměrný podle počátku souřadnicového systému.

Funkce sudá



Funkce lichá



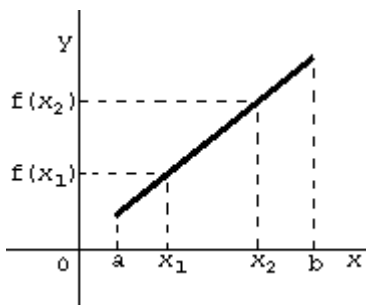
Zdroj obr: <http://karel.kotynek.sweb.cz/documents/matematika/matematika2r/funkce/1.3.htm>

II. Funkce rostoucí a klesající:

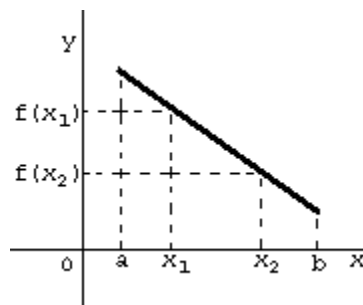
- Necht' je dána funkce $f; D(f)$ a množina M , která je podmnožinou $D(f)$.
- Necht' f je funkce, pro niž platí: jestliže $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$.
- Funkce f je rostoucí v množině M , právě tehdy, když pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Funkce f je klesající v množině M , právě tehdy, když pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Funkce f je neklesající v množině M , právě tehdy, když pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Funkce f je nerostoucí v množině M , právě tehdy, když pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

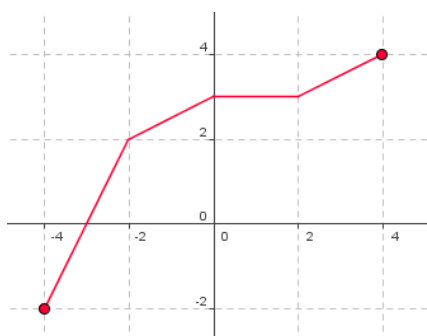
Funkce rostoucí



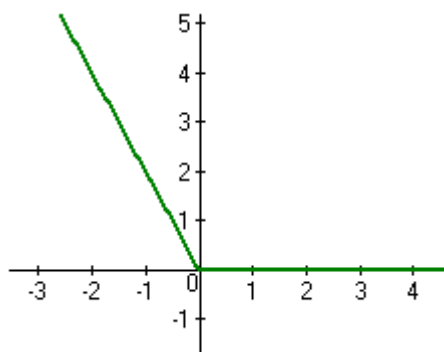
Funkce klesající



Funkce neklesající



Funkce nerostoucí



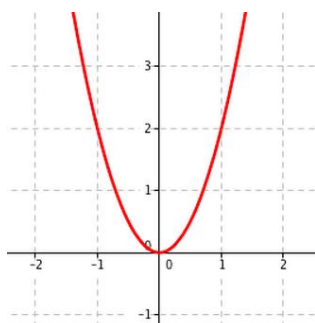
Zdroj obr: <http://www.matweb.cz/funkce#gsc.tab=0>

III. Funkce omezená v množině M

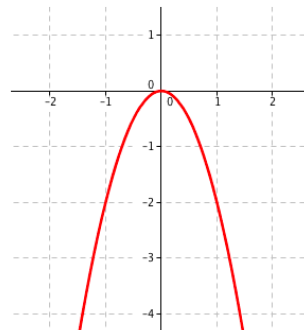
- Funkce f je **zdola omezená** v množině M právě tehdy, když existuje číslo k takové, že pro každé $x \in M$ platí: $f(x) \geq k$.
- Funkce f je **shora omezená** v množině M právě tehdy, když existuje číslo d takové, že pro každé $x \in M$ platí: $f(x) \leq d$.
- Funkce f je **omezená** v množině M právě tehdy, když je v množině M omezená shora i zdola

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Funkce zdola omezená

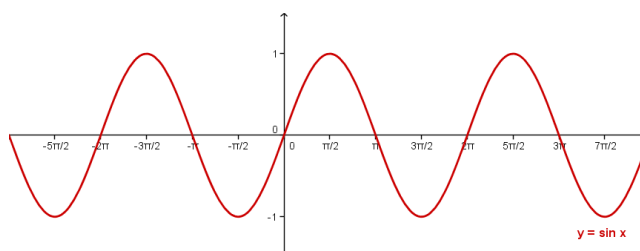


Funkce shora omezená



Zdroje obr: <http://www.matematika.cz/kvadraticka-funkce>

Funkce omezená

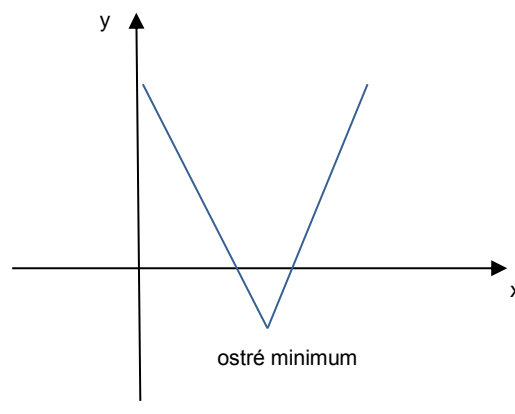
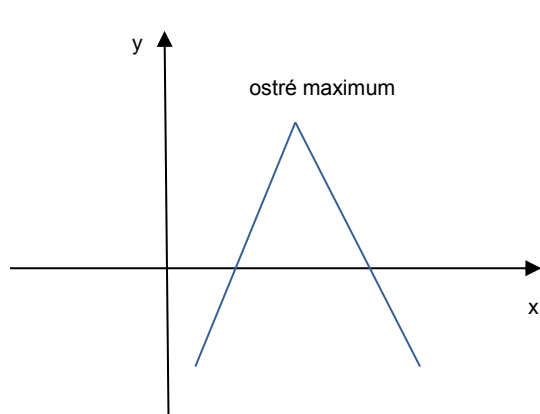
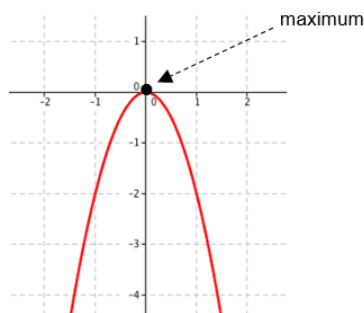
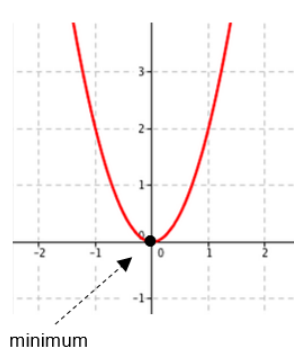


Zdroj obr: <http://aalienana.blogspot.cz/2014/01/zmienna-jak-sinusoida.html>

IV. Maximum a minimum funkce

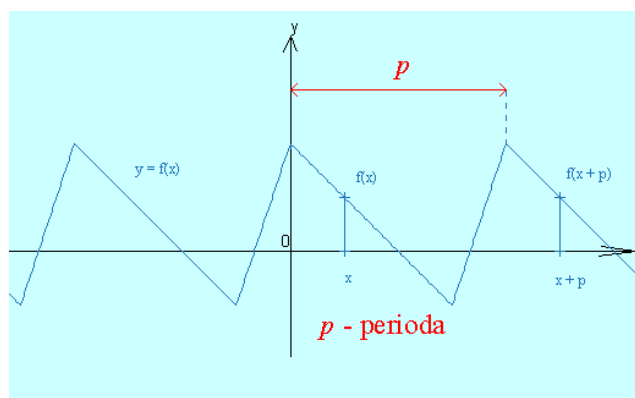
- Funkce f má **maximum** v množině M pro $a \in M$ právě tehdy, když pro každé $x \in M$ platí: $f(a) \geq f(x)$.
- Funkce f má **minimum** v množině M pro $a \in M$ právě tehdy, když pro každé $x \in M$ platí: $f(a) \leq f(x)$.
- Funkce f má **ostré maximum** v množině M pro $a \in M$ právě tehdy, když pro každé $x \in M$ platí: $f(a) > f(x)$.
- Funkce f má **ostré minimum** v množině M pro $a \in M$ právě tehdy, když pro každé $x \in M$ platí: $f(a) < f(x)$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



V. Funkce periodická:

- Funkce je periodická, právě tehdy, když existuje takové kladné číslo p tak, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí: $x \in D(f) \Rightarrow x + k \cdot p \in D(f)$, p je perioda funkce
- Platí: $f(x + k \cdot p) = f(x)$



Zdroj obr: <http://www.gymkyjov.cz/sw/ler/perfce.php>

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VI. Funkce prostá:

- Funkce je prostá právě tehdy, když pro každé $x_1, x_2 \in D$ platí: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Každá rostoucí nebo klesající funkce je prostá.

Seznam použité literatury a internetových zdrojů

Výukové materiály a některé úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.

O. ODVÁRKO: Matematika pro gymnázia Funkce. Prometheus, 2005

O. ODVÁRKO, J. ŘEPOVÁ: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 3. část. Prometheus 2009

M. HUDCOVÁ, L. KUBIČÍKOVÁ: Sbírká úloh z matematiky pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium. Prometheus 2010

P. ČERMÁK, P. ČERVINKOVÁ: Odmaturuj z matematiky 1. Didaktis 2007

<http://www.gymkyjov.cz/sw/ler/perfce.php>

<http://karel.kotynek.sweb.cz/documents/matematika/matematika2r/funkce/1.3.htm>

<http://www.matweb.cz/funkce#gsc.tab=0>

<http://www.matweb.cz/funkce#gsc.tab=0>

<http://www.fi.muni.cz/~hrebicek/maple/mws7/funkce/funkce1.html>

<http://www.gymkyjov.cz/sw/ler/perfce.php>

<http://www.matematika.cz/kvadraticka-funkce>

<http://aalienana.blogspot.cz/2014/01/zmienna-jak-sinusoida.html>